Math. P. 530 £

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

F. 0

<36608287460012

<36608287460012

Bayer. Staatsbibliothek

Robert Simsons

drey erste Bücher

von den

Kegelschnitten,

übersetzt

und mit Zusätzen herausgegeben

von

Johann Wilhelm Camerer.

Mit 18 Kupfertafeln.

Tübingen
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung
1809.

Bayerische Staatsbibliothek München
Wd 140. D.
72 BG

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
Bayerische Staatsbibliothek München

Vorrede des Uebersetzers.

Die Lehre von den Kegelschnitten ist bekanntlich eine der wichtigsten in der Mathematik, theils an sich, weil sie dem wißbegierigen Schüler, nachdem er die ersten Elemente, oder die Hauptlehren von den geraden Linien, den daraus zusammengesetzten Figuren und dem Kreise gefaßt hat, zuerst eine neue Aussicht in die weiten Gefilde der Mathematik erdfnet, und ihn eine Klasse von krummen Linien kennen lehrt, die unter sich und mit dem Kreise, der nun selbst als in dieser Klasse mitbegriffen erscheint, so mannichfaltige Aehnlichkeiten, von denen aber jede insbesondere doch wieder so manche nach ihrer besondern Natur ihr ausschließlich

zukommende Eigenthümlichkeiten hat, wo es dann bey der dabey vorkommenden Vergleichung, Verallgemeinerung, Beschränkung oder Bestimmung der Sätze ungemein viel zu lernen und zu denken giebt, und besonders die Elementar-Sätze der Geometrie, wegen ihrer beständigen Wiederholung und Anwendung, dem Schüler um so tiefer eingeprägt werden — theils wegen ihres so häufigen, bey den interessantesten Untersuchungen in den höheren Theilen der reinen und angewandten Mathematik immer wiederkehrenden Gebrauchs. Auch zog wirklich ihr Studium, sobald man über die ersten Elemente hinausgekommen war, die Aufmerksamkeit der frühesten griechischen Mathematiker auf sich. Sie betrachteten sie, wie schon der Nahme, den sie ihnen gaben, darauf hindeutet, als gemeinschaftliche Durchschnitts-Linien einer Kegel-Oberfläche und einer Ebene, und leiteten aus der Natur der auf diese Art bestimmten krummen Linien, und aus ihrer unmittelbaren Betrachtung selbst die Haupt-Eigenschaften durch weitere geometrische Konstructionen ab. Auf diese Art wurde der erste unmittelbare rein-theoretische Zweck der Kenntniß der Kegelschnitte in einem hohen Grad erreicht, und Apollonius 8 Bücher von den Kegelschnitten, wovon noch die 4 erste griechisch, die 3 folgende arabisch vorhanden sind, und das 8te von dem berühmten Herausgeber derselben Halley nach den von Pappus aufbehaltenen Lehrsätzen wieder hergestellt worden ist, enthalten bei weitem die wichtigsten über die Kegelschnitte und ihre Eigenschaften gemachten Bemerkungen, auf diese Art, mit vielem Scharfsinn, rein-geometrisch entwickelt. In neuern Zeiten, nachdem

DesCartes die Anwendung der Algeber auf Geometrie gelehrt hatte, trug man auch die Lehre von den Kegelschnitten nach einer geometrisch-algebraischen Methode vor, und besonders seit Eulers Zeiten wurde auch die analytisch-trigonometrische Methode häufig gebraucht, welche durch die trigonometrische Formeln manche geometrische Konstructionen überflüßig macht, indem die Verhältnisse der vorkommenden geraden Linien schon durch die Formeln selbst ausgedrückt sind. So gewiß aber diese algebraische und trigonometrische Methode ihre eigenthümliche Vorzüge haben, und besonders dadurch sich empfehlen, daß sie oft mit wenigen kurzen Zeichen darstellen, was bey der rein-geometrischen Methode weitläuffer mit Worten ausgedrückt werden müßte, und daß sie oft durch eine einzige Formel, durch den bloßen Gebrauch eines + oder — Zeichens die übereinstimmende oder verschiedene Eigenschaften der verschiedenen Kegelschnitte angeben, so sehr sie in dieser Hinsicht zu einer allgemeinen Uebersicht der Säße taugen, so unentbehrlich sie manchmal sind, wenn von wirklicher Berechnung der durch Kegelschnitte bestimmten Größen die Rede ist; so scheint doch, bey dem ersten Unterricht des Anfängers, die rein-geometrische Methode, die übrigens, wie schon die gegenwärtige Bearbeitung von Simson zeigt, nicht nothwendig von der Betrachtung des Kegels ausgehen muß, bey weitem die vorzüglichere zu seyn. Sie stellt die Gegenstände dem Geiste unmittelbar anschaulich dar, und indem sie der Phantasie ein der Sache selbst entsprechendes Bild vorhält, und damit diese lebendiger beschäftigt, prägen sich auch, nach der Natur des menschlichen Geistes, die an dem Bilde

haftende Eindrücke von den Eigenschaften des Gegenstandes leichter und tiefer ein, als durch bloße, wenn sonst in anderer Hinsicht noch so gut gewählte, doch an sich in keiner unmittelbaren Verbindung mit dem Gegenstand stehende, willkührliche Zeichen; sie erleichtert also in dieser Hinsicht das Verstehen und Behalten der Sätze. Und, wenn gleich die Zeichen-Methoden manchmal die Beweise abkürzen, oder abzukürzen scheinen — wirklich ist dieß bey weitem nicht immer der Fall, manchmal geben leicht gezogene Linien etwas sogleich an, was sonst nicht ohne umständliche Rechnung dargestellt werden kann, besonders, wenn man es eben so scharf begründen will, als man es nach der Methode der Alten zu thun gewohnt ist; manchmal scheinen auch nur die algebraische oder trigonometrische Beweise kürzer wegen des Geschmeidigen ihrer symbolischen Zeichen, sind es aber keineswegs, so bald man sich alles, was doch im Grunde immer geschehen muß, deutlich entwickelt, und in Worte ausgedruckt denkt — wenn aber auch die Zeichen-Methoden manchmal durch das Begreiffen mehrerer Fälle unter einer Formel wirklich abkürzen; so ist doch das längere Verweilen bey den einzelnen Fällen, und das deutliche Auseinandersetzen derselben nach der geometrischen Methode für den Anfänger, dem es um gründliches Studium zu thun ist, gewiß nicht vergeblicher Zeit-Verlust. Auch sind wir, je genauer wir die einzelne, nachher allerdings unter einem allgemeinen Ausdruck zu begreiffende Fälle kennen, desto sicherer vor Fehlschlüssen bey der Anwendung einer allgemeinen Formel, und es wird uns desto leichter, in einzelnen vorkommenden Fällen vortheilhafte Abkürzun-

gen anzubringen. Außerdem verdient doch wohl die oben schon erwähnte, bey der geometrischen Methode viel häufiger, und bey jedem Schritt vorkommende, Wiederholung und Anwendung der Elementar-Geometrie für den Anfänger gar sehr in Betracht gezogen zu werden. Ohne Zweifel durch solche Gründe bestimmt haben daher auch immer, und noch in den neuesten Zeiten, angesehene Mathematiker sich für die Beybehaltung der geometrischen Methode, wenigstens bey dem ersten Unterricht, deutlich erklärt. Klügel sagt in seinem mathematischen Wörterbuch, Artikel: Kegelschnitt. „Mit der rein-geometrischen Me„thode der Alten in der Lehre von den Kegelschnitten muß „man sich bekannt machen, so bald man die Anfangsgrün„de nach Euklid gefaßt hat." Noch stärker und bestimmter drückt sich Fischer aus in seiner Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis S. 95. Ich kann mich nicht enthalten, die schöne Stelle hieher zu setzen: „Die höhere Geometrie, sagt er, hat ihren schönen reingeometrischen Character in den neuern Zeiten zum Schaden „der Wissenschaft beynahe ganz verlohren. Es ist wahr, „die Anwendung der Analysis auf die Curven giebt ihrer „Theorie eine so bewundernswürdige einfache Ansicht, daß „es kein Wunder ist, wenn sich die Mathematiker haben „verleiten lassen, über derselben die Methode der Alten „beynahe ganz zu vergessen. Aber auf der andern Seite „gewährt wieder die rein-geometrische Methode so wichtige „Vortheile und beschäftigt den Scharfsinn auf eine so ei„genthümliche Art, daß jedem, der es mit der Wissenschaft „gut meint, die Aufrechthaltung der Methode der Alten

„am Herzen liegen muß. Man sollte daher in jedem Lehr„buche wenigstens die Lehre von den Kegelschnitten erst im „Geiste der Alten vortragen, ehe man ihre analytische Be„handlung zeigte. Ein gewisser Mittelweg, den einige „eingeschlagen haben, die Lehrsätze aus den Alten, und die „Beweise aus der neuern Analysis zu nehmen, scheint mir „nicht zweckmäßig. Seit Newton wüßte ich in der That „keinen Geometer zu nennen, der beide Methoden so voll„kommen vereinigt hätte, als dieser eminente Geist."

Aber, ungeachtet der Lobsprüche, die man der rein-geometrischen Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten, wenigstens für den ersten Unterricht, ertheilt, und die selbst Kästner, vgl. seine Hubes Versuch einer analyt. Abhandlung von den Kegelschnitten beygegebene Betrachtungen, nicht ganz abzuläugnen wagt, kenne ich doch kein deutsches, oder auch nur ins Deutsche übersetztes Werk, (denn, was Hausen in seinen Element. Mathes. 1734 hat, ist, außerdem, daß das Werk jetzt nicht mehr zu haben ist, nicht deutsch, und daß de la Chapelles von Böckmann übersetzte Kegelschnitte keine rein-geometrische Methode befolgen, lehrt der erste Anblick) das nach dieser Methode bearbeitet wäre. Nur bey den Engländern finden sich Werke dieser Art. Diese sind aber in Deutschland so selten, daß selbst Klügel die hier vorliegende Simsonsche Arbeit nur aus einer Anzeige von Büsch zu kennen scheint. Um so viel mehr schien es keine unzweckmäßige Mühe zu seyn, von Robert Simsons Schrift über die Kegelschnitte, die von allen Kennern als eine der vorzüglichsten über diese Materie gerühmt wird, und unter dem Titel: Section. Conicarum libri quin-

que zuerst 1735, nachher verbessert und vermehrt 1750 zu Edimburg herauskam, wenigstens die 3 erste Bücher dem deutschen Publikum zu übergeben. Die 2 folgende Bücher Simsons enthalten mehrere andere, meistens den verschiedenen Kegelschnitten gemeinschaftliche Eigenschaften derselben. Ob diese ebenfalls deutsch erscheinen werden, kann noch nicht bestimmt angegeben werden. Inzwischen enthalten schon die 3 ersten Bücher so viel Merkwürdiges, daß es keinen Freund der Mathematik reuen wird, sie zu studiren. Um auf alle Fälle das Wissenswürdigste und Nöthigste von den Kegelschnitten schon hier beysammen zu haben, (an eine absolute Vollständigkeit ist ohnehin der Natur der Sache nach nicht zu denken) ist nicht nur Einiges aus den folgenden Büchern, besonders, was die Krümmungskreise der Parabel und Ellipse betrift, nur etwas umständlicher auseinandergesetzt, als es bey Simson war, und dann über die Quadratur der Parabel und Ellipse aus Archimeds Schriften hier angehängt worden, sondern es sind auch noch mehrere andere Zusätze und Folgerungen, namentlich auch in Bezug auf die umgekehrte Sätze beygefügt worden, wovon das Publikum nebst mir den bedeutendsten Theil der Güte meines verehrungswürdigsten Lehrers und Freundes Herrn Professors von Pfleiderer zu Tübingen verdankt, der mir zu diesem Zweck sein Manuscript über Simsons Kegelschnitte zu benutzen verstattete. Um jedoch Simsons Arbeit bestimmt von den sonstigen Zusätzen abzusondern, wurden diese entweder in Klammern eingeschlossen, oder dadurch ausgezeichnet, daß bey Simsons Sätzen oder Zusätzen ausdrücklich sein Name beygefügt

wurde. Ausgenommen die Sätze 5—10 des 1sten Buchs, welche um des leichter zu übersehenden Zusammenhangs willen etwas anders geordnet wurden, blieb überall die Simsonsche Anordnung. Endlich fügte ich, um dem Anfänger wenigstens einen Begriff von der analytischen Behandlungsart der Kegelschnitte zu geben, einen kurzen für diese Absicht bestimmten Anhang bey.

Stuttgardt den 25. Jul. 1809.

Camerer.

Erstes Buch.

Von der Parabel.

Erklärungen.

1.) Es seye (Fig. 1.) eine gerade Linie AB, und ausserhalb derselben ein Punkt C. In der durch diese gerade Linie und den Punkt C gehenden Ebene lege man einen Winkelhacken DEF so an AB an, daß DE auf eben der Seite von AB zu liegen komme, auf welcher C liegt. An den Endpunkt F der andern Seite des Winkelhackens EF binde man einen Faden FGC, der so lang ist, als FE, den andern Endpunkt dieses Fadens beveſtige man in C, und ziehe dann vermittelst eines Stifts das Stück des Fadens FG långst der Seite FE vest an; so wird, während man die Seite DE des Winkelhackens långst der Linie AB fortbewegt, der inzwischen immer den Faden an FE anspannende Stift eine Linie beschreiben, die man eine Parabel nennt. Diese Linie kann man bis auf eine Entfernung von C fortsetzen, die jede gegebene Entfernung übersteigt, indem man EF grösser als diese annimmt. (Schon hieraus folgt, daß die Parabel keine in sich selbst zurückkehrende Linie ist. Auch liegt sie demnach ganz in einer Ebene auf einer Seite der Directrix.)

2.) Die gerade Linie AB heißt die Directrix.

3.) Der Punkt C aber der Brennpunkt der Parabel.

4.) Jede gerade Linie, die senkrecht auf der Directrix steht, heißt ein Durchmesser, und der Punkt, in welchem sie der Parabel begegnet, der Scheitel dieses Durchmessers: der Durchmesser aber, der durch den Brennpunkt geht, heißt die Axe, und sein Scheitel der Hauptscheitel der Parabel.

5.) Eine gerade Linie, deren beyde Endpunkte in der Parabel liegen, und die von einem Durchmesser halbirt wird, heißt eine diesem Durchmesser zugehörige Ordinate, (der Theil des

Durchmessers zwischen der Ordinate und seinem Scheitel, heißt die Absciſſe.)

6.) Die gerade Linie, welche das Vierfache ist von dem Stück eines Durchmessers, das zwischen seinem Scheitel und der Directrix liegt, heißt der Parameter (Parameter s. latus rectum) dieses Durchmessers. (Wenn man von dem Parameter der Parabel überhaupt spricht, so versteht man darunter den Parameter der Axe, oder den Haupt=Parameter.)

7.) Eine gerade Linie, die der Parabel in einem einzigen Punkt begegnet, sonst aber beiderseits verlängert, ausser der Parabel fällt, heißt eine Berührungs=Linie der Parabel in diesem Punkt. Einige weitere Erklärungen s. unten bey Satz 7, 4. 8. 10. Zus. und dann ferner nach dem 21sten Satz.

Satz 1. (Sims. 1 S.) Fig. 1.)

Ein Perpendikel GE, das von irgend einem Punkt G der Parabel auf die Directrix gefällt wird, ist immer gleich der geraden Linie GC von G an den Brennpunkt C.

Denn es seye EF die Länge des Winkelhackens, mit welchem die Parabel beschrieben wird; so ist mithin (1ste Erklär.) EF gleich der Länge des Fadens FGC. Nimmt man daher das gemeinschaftliche Stück GF hinweg; so bleibt übrig GE = GC.

1. Zus. (Sims. 3.) Das Stück CB der Axe zwischen dem Brennpunkt und der Directrix wird mithin in dem Hauptscheitel H halbirt. (CB, oder das Perpendikel von dem Brennpunkt an die Directrix, ist mithin der halbe Parameter der Axe (6te Erkl.)

2. Zus. Wenn man irgend eine Linie ZZ parallel mit der Directrix zieht, und aus irgend einem Punkt S der Parabel auf diese Linie ein Perpendikel SU, und dann aus dem Brennpunkt C an S die Linie CS zieht; so ist die Summe der Linien CS und SU (in dem Fall, wenn S zwischen ZZ und der Directrix liegt) oder der Unterschied der Linien CS, SU (wenn S auf der entgegengesetzten Seite liegt) konstant, nemlich gleich der Entfernung UX der Linie ZZ von der Directrix.

3. Zus. Wenn man aus einem Punkt S der Parabel an die

Axe ein Perpendikel SY, und an den Brennpunkt eine Linie SC zieht; so ist SC = BY = HY + HC.

Satz 2. (Simſ. 2. S.) Fig. 2.)

Umgekehrt: Wenn CD, die Entfernung eines Punkts D von dem Brennpunkt der Parabel C, gleich ist dem Perpendickel DE, das von eben diesem Punkt auf die Directrix gefällt wird; so liegt der Punkt D in der Parabel.

Aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CD beschreibe man einen Kreis, der der Axe in F begegne, es seye H der Hauptscheitel, und man ziehe CE. Weil nun CD + DE > CE; so ist um so viel mehr CD + DE > CB, und, weil CD = DE, und CH = HB (1st S. 1. Zuſ.) so ist $\left.\begin{matrix}CD\\FC\end{matrix}\right\} > CH$. Folglich liegt die Parabel auf der Seite des Scheitels H innerhalb des Kreises GDF, und muß dem Kreise nothwendig begegnen, weil sie auf eine Entfernung von dem Brennpunkt C, die grösser ist, als jede gegebene, fortgeführt werden kann. Sie wird aber dem Kreise in dem Punkte D begegnen. Denn, wenn es möglich ist, begegne sie ihm in einem andern Punkt L auf eben der Seite der Axe, auf welcher D liegt. Man ziehe CL, und von L ein Perpendikel LM an die Directrix, und eine Parallele LN mit der Directrix, welche der Linie DE in N begegne. Weil nun L nach der Annahme in der Parabel liegen soll; so müßte $\left.\begin{matrix}CL\\CD\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}LM\\EN\end{matrix}\right.$ seyn (Satz 1.) Aber es soll auch nach der Voraussetzung CD = DE seyn. Mithin wäre DE = EN, was unmöglich ist. Mithin kann die Parabel dem Kreis in keinem von D verschiedenen Punkte L begegnen. Da sie ihm aber doch begegnen muß, so muß sie ihm in D begegnen. Folglich liegt D in der Parabel.

1. Zuſ. Dieser Satz kann auch noch so ausgedruckt werden: Wenn man aus einem beliebigen Punkt P der Axe ein Perpendikel auf derselben errichtet, das von einem aus dem Brennpunkt C mit dem Halbmesser CD = PB beschriebenen Kreis in D durchschnitten wird; so liegt D in der Parabel. Hieraus folgt

eine leichte Methode, geometrisch so viele Punkte als man will in der Parabel zu bestimmen, wenn man den Brennpunkt und die Directrix kennt.

2. Zus. Und da jedem aus irgend einem Punkt P der Axe unterhalb H errichteten Perpendickel ein aus C mit dem Halbmesser CD = PB beschriebener Kreis in 2, aber nicht mehreren Punkten begegnet; so begegnet jedes solches Perpendickel der Parabel in 2. Punkten D, d, aber nicht in mehreren.

3. Zus. Weil ein aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne gefälltes Perpendickel diese immer halbirt; so theilt die Axe einer Parabel alle Linien wie Dd, die senkrecht auf der Axe stehen, und deren Endpunkte in der Parabel liegen, in 2. gleiche Theile, oder solche Linien sind Ordinaten der Axe (5te Erklär.)

4. Zus. Die durch den Brennpunkt gehende Ordinate ist gleich dem Parameter der Parabel, indem jede ihrer Hälften = CB = dem halben Parameter ist (1. Satz 1. Zus.)

5. Zus. Aus Zus. 2. folgt noch, daß die Axe auch jedes durch eine auf sie perpendikular gezogene Linie begränzte Stück der Parabel in 2. gleiche und kongruente Theile theilt.

6. Zus. Jeder aus einem Punkt D der Parabel mit einem Halbmesser DC, der gleich ist der Entfernung dieses Punkts von dem Brennpunkt, beschriebene Kreis berührt die Directrix, und umgekehrt, jeder aus D mit einem Halbmesser DE, der gleich ist der Entfernung dieses Punkts von der Directrix, beschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt.

Satz 3. (Simſ. 3. S.) Fig. 1.

1. Jede gerade durch den Brennpunkt C gezogene Linie begegnet der Parabel (und zwar, wenn sie nicht senkrecht auf der Directrix ist, in 2. Punkten, aber nicht in mehreren) 2. Liegt ein Punkt K innerhalb der Parabel, d. h. auf eben der Seite derselben, auf welcher der Brennpunkt liegt; so ist seine Entfernung KC von dem Brennpunkt C kleiner, als das Perpendikel KL, das man von K auf die Directrix AB fällen kann. 3. Liegt hingegen ein Punkt Q ausserhalb der Parabel; so ist seine

Entfernung QC von dem Brennpunkt C grösser, als das von Q auf die Directrix gefällte Perpendikel QR.

1.) Denn, wenn die durch den Brennpunkt gezogene gerade Linie BC senkrecht ist auf die Directrix; so liegt (Satz 2.) der Punkt H, welcher ihr Stück zwischen dem Brennpunkt und der Directrix halbirt, auf der Parabel. (Und für diese Linie BC d. i. die Axe ist aus der Verzeichnung (1ste Erkl.) klar, daß sie der Parabel nicht wieder begegnet.) Ist aber irgend eine andere Linie CP durch den Brennpunkt gezogen; so halbire man den Winkel BCP durch die gerade Linie CM, welche der Directrix in M begegne, und ziehe MN mit der Axe gleichlauffend. Weil nun PCM + CMN < 2 R (rechte Winkel), denn jeder von ihnen ist < R; so treffen die Linien CP, MN zusammen. Es geschehe diß in O. Weil nun MCO = BCM = CMO; so ist CO = OM, mithin der Punkt O in der Parabel (2. Satz.) (Und eben so wird gezeigt, daß die nach der andern Seite des Brennpunkts hin verlängerte Linie CP der Parabel noch in einem andern Punkte o begegne. Daß sie ihr aber in nicht mehr als 2. Punkten begegne, erhellet aus dem nächstfolgenden Zusatz.)

2.) Durch einen Punkt K innerhalb der Parabel ziehe man die Linie KC. Sie begegne der Parabel in O, und man ziehe an die Directrix KL und OM parallel mit der Axe, und ausserdem noch OL; so ist CO = OM (Satz. 1.) Aber OM < OL (19, 1 El.) mithin um so mehr OM oder OC < OK + KL (20, 1. E.) mithin KC < KL.

3.) Durch einen Punkt Q ausserhalb der Parabel ziehe man die Linie QC. Sie begegne der Parabel in O. Man ziehe an die Directrix QR, OM parallel mit der Axe, und ausserdem noch QM; so ist CO = OM, mithin CQ = OM + OQ > MQ > QR.

Zus. (Simſ. 3.) Wenn daher die Entfernung eines Punkts von dem Brennpunkt der Parabel kleiner oder grösser ist, als das von diesem auf die Directrix gefällte Perpendikel; so liegt der Punkt im ersten Fall innerhalb, im andern ausserhalb der Parabel.

Satz 4. (Simſ. 4. S.) Fig. 1.

Jede auf der Directrix AB ſenkrecht ſtehende gerade Linie MT begegnet der Parabel in einem einzigen Punkte, und fällt unter dieſem Punkte innerhalb der Parabel. (Und umgekehrt: jedes aus einem Punkte der Parabel O auf die Directrix gefällte Perpendikel OM begegnet der Parabel nur in dieſem Punkte, nemlich der Theil des Perpendikels, der zwiſchen dieſem Punkte und der Directrix liegt, fällt auſſerhalb der Parabel, der andere Theil deſſelben innerhalb der Parabel.)

1.) Man ziehe MC an den Brennpunkt, und dann eine Linie CO ſo, daß der Winkel MCO = CMT werde. Dieſe begegne der Linie MT in O; ſo iſt OM = OC, mithin der Punkt O in der Parabel (2. Satz.) Man nehme nun auf der Verlängerung von MO irgend einen Punkt T, und ziehe TC; ſo iſt TC < CO + OT d. i. < MT, mithin der Punkt T innerhalb der Parabel (2. Satz. Zuſ.) Und eben ſo wird bewieſen, daß jeder oberhalb O auf der geraden Linie MO gelegene Punkt t auſſerhalb der Parabel ſeye.

2.) Man ziehe OC, MC; ſo iſt OC = OM (1. Satz) mithin Winkel OCM = OMC. Zieht man daher an einen Punkt T, der Linie MO, der innerhalb O liegt, eine Linie CT; ſo iſt Winkel OCT > OMC, mithin MT > CT, folglich liegt der Punkt T innerhalb der Parabel (3. Satz, Zuſ.) Eben ſo wird gezeigt, daß jeder Punkt t der Linie MO, der oberhalb O liegt, auſſerhalb der Parabel ſeye.

Satz 5. Figg. 3. a. b. c.

Wenn man eine gerade Linie durch irgend 2. Punkte M, N in einer Parabel zieht, und ſie auf beyden Seiten verlängert; ſo fällt der Theil dieſer geraden Linie, der zwiſchen dieſen beyden Punkten liegt, ganz innerhalb der Parabel, ihre Verlängerung hingegen ganz auſſerhalb.

Wenn die gerade Linie durch den Brennpunkt der Parabel geht, oder, wenn ſie ſenkrecht auf ihre Axe ſteht; ſo folgt der

Satz leicht aus Satz 3. und aus 2. Satz 2. Zus. vgl. mit 3. Satz, Zus.

In den andern Fällen fälle man aus dem Brennpunkt F auf MN das Perpendikel FK, und verlängere es, bis es der Directrix in C begegnet, welches immer geschehen wird, weil MN nicht senkrecht auf die Directrix (Satz. 4.) mithin FK nicht mit ihr parallel seyn kann.

Man nehme $KL = KF$ auf der Verlängerung von CK, wenn C, K auf entgegengesetzte Seiten des Brennpunkts F fallen, oder auf CK selbst, wenn sie auf einerley Seite fallen, und fälle von M und N auf die Directrix die Perpendikel MQ, NR.

Weil nun $MC > MQ$ d. i. $> MF$; so ist folglich $CK^2 + MK^2 > FK^2 + MK^2$, und $CK > FK$, mithin fällt im letzten Fall der Punkt L zwischen C und K. Und da $MQ = MF = ML$, und $NR = NF = NL$ ist; so gehen die aus M, N mit den Halbmessern MF, NF beschriebene Kreise durch die Punkte L, F und berühren die Directrix, jener in Q, dieser in R. Mithin ist sowohl $\left.\begin{matrix} CQ^2 \\ \text{als } CR^2 \end{matrix}\right\} = FC \times CL = CL^2 \pm 2\,CL \times LK$. Mithin ist

1.) für jeden Punkt O der geraden Linie MN, der zwischen M und N liegt, $CS^2 < CL^2 \pm 2\,CL \times LK$, weil $CS < CQ$ oder CR. Nun ist $OS^2 + CS^2 = \left.\begin{matrix} OL^2 \\ OF^2 \end{matrix}\right\} + CL^2 \pm 2\,CL \times LK$, indem beyde Summen $= CO^2$ sind, mithin ist $OS^2 > OF^2$, und $OS > OF$, mithin fällt der Punkt O innerhalb der Parabel (3 Satz, Zus.) Hingegen

2.) für jeden Punkt X, der auf der Verlängerung von MN liegt, ist $CZ^2 > CL^2 \pm 2\,CL \times LK$, weil $CZ > CQ$ oder CR. Nun ist $XZ^2 + CZ^2 = \left.\begin{matrix} XL^2 \\ XF^2 \end{matrix}\right\} + CL^2 \pm 2\,CL \times LK$, weil beyde Summen $= CX^2$ sind, mithin ist $XZ^2 < XF^2$, folglich $XZ < XF$, mithin fällt der Punkt X ausserhalb der Parabel (3. Satz, Zus.)

1. Zus. Eine Parabel und eine gerade Linie schneiden sich nur in 2. Punkten, und berühren sich nur in einem Punkt.

2. Zus. Die Parabel ist eine gegen ihren Brennpunkt hin hole, und gegen die Directrix hin erhabene krumme Linie.

Satz 6. Figg. 3. a. b. c.

Jede gerade Linie, die man durch einen Punkt innerhalb der Parabel, jedoch nicht parallel mit der Axe, oder, was einerley ist, nicht senkrecht auf die Directrix zieht, begegnet der Parabel in 2. Punkten (Simſ. 8. S. 2. Z. b.)

Wenn die gerade Linie durch den Brennpunkt geht, oder senkrecht auf die Axe ist; so ist der Satz schon oben bewiesen worden (3. Satz und 2. Satz 2. Zus.)

Für die übrige Fälle seye auf die in Frage stehende durch einen Punkt O innerhalb der Parabel gezogene gerade Linie wieder aus dem Brennpunkt F ein Perpendikel FK gefällt. Da nun die gerade Linie (Voraussetz) nicht senkrecht ist auf die Directrix; so wird die Verlängerung von FK der Directrix in einem Punkte C begegnen. Ferner, da $OF < OS$ ist, (3. Satz.), mithin noch viel mehr $OF < OC$, folglich $FK < CK$; so kann man $KL = KF$ auf der Linie CK selbst nehmen, wenn die Punkte C, K auf einerley Seite von F fallen: fallen sie auf entgegengesetzte Seiten, so nimmt man $KL = KF$ auf der Verlängerung von CK. Nimmt man nun auf der Directrix auf beyden Seiten von C, $CQ = CR =$ der mittlern Proportionallinie zwischen CF, CL, und errichtet aus Q, R Perpendikel auf die Directrix, bis sie der vorgegebenen durch O gezogenen Linie in M, N begegnen, welches immer geschehen wird, weil (Voraussetz) diese Linie nicht senkrecht auf die Directrix ist; so werden die Punkte M, N zugleich in der Parabel liegen. Denn da

sowohl $MQ^2 + CQ^2 = \left.\begin{matrix} ML^2 \\ MF^2 \end{matrix}\right\} + CL^2 \pm 2\,CL \times LK$

als $NR^2 + CR^2 = \left.\begin{matrix} NL^2 \\ NF^2 \end{matrix}\right\} + CL^2 \pm 2\,CL \times LK$

indem beyde Summen im ersten Fall $= MC^2$, im andern $= NC^2$ sind, und da nach der Verzeich. $CQ^2 = CR^2 = FC \times CL = CL^2 \pm 2\,CL \times LK$; so ist $MQ^2 = MF^2$, mithin $MQ = MF$, und $NR^2 = NF^2$, mithin $NR = NF$; folglich liegen die

Punkte M, N auf der Parabel (2. Satz.) oder die vorgegebene durch O gezogene gerade Linie schneidet die Parabel in diesen Punkten.

Satz 7. (Simſ. 5. und 7. S.) Figg. 4. a. b.

Eine gerade Linie berührt eine Parabel 1.) wenn ſie mit ihr in dem Hauptſcheitel H zuſammentrift, und ſenkrecht auf der Axe ſteht. 2.) wenn ſie ihr in irgend einem andern Punkt D begegnet, und den Winkel ADC halbirt, den das aus dieſem Punkte auf die Directrix gefällte Perpendikel AD mit der nach dem Brennpunkt C gezogenen geraden Linie DC macht. In jedem andern Falle fällt ſie zum Theil innerhalb der Parabel, oder ſchneidet ſie.

1. a.) HK ſeye in dem Hauptſcheitel H ſenkrecht auf die Axe BC, man ziehe aus irgend einem Punkt K dieſer Linie KC an den Brennpunkt C. Weil nun KC > CH d. i. > BH, oder > KL (wenn man nemlich von K auf die Directrix das Perpendikel KL fällt); ſo liegt K auſſerhalb der Parabel (3. Satz, Zuſ.), mithin berührt HK die Parabel (7te Erkl.)

b.) Geht hingegen durch den Hauptſcheitel H irgend eine gerade Linie HP unter einem ſchiefen Winkel mit der Axe; ſo fälle man aus dem Brennpunkt das Perpendikel CS darauf, und von S auf die Directrix ein Perpendikel CR, das der Linie HK in Q begegne. Weil nun CS < CH d. i. < HB d. i. < QR; ſo iſt noch vielmehr CS < SR, mithin geht die Linie HP durch einen Punkt S innerhalb der Parabel (3. Satz, Zuſ.)).

2. a.) Es theile die Linie DE den Winkel ADC in 2. gleiche Theile. Man nehme auf DE irgend einen andern Punkt F, und ziehe FA, FC, AC, und ſenkrecht auf die Directrix die Linie FG. Weil nun DA = DC (1 Satz.), DF gemeinſchaftlich, und ADF = CDF; ſo iſt FA = FC (4. 1. El.) mithin FC > FG, folglich der Punkt F auſſerhalb der Parabel (3. Satz, Zuſ.) folglich berührt DE die Parabel in D (7. Erklär.)

b.) Es theile hingegen α.) eine Linie DN den Winkel CDA in 2 ungleiche Theile, ſo daß CDN < ADN iſt. Man fälle aus

dem Brennpunkt C auf DN das Perpendikel CN, welches zwischen CB und CA fallen, und der Linie BA in einem Punkt M begegnen muß, so daß BM < BA ist. Aus M errichte man auf der Directrix ein Perpendikel, das der Linie DN nothwendig in einem Punkt O begegnen muß, weil DN nicht senkrecht auf die Directrix seyn kann, da DA es ist. Da nun DM > DA, oder > DC, mithin $MN^2 + DN^2 > CN^2 + DN^2$; so ist $MN^2 > CN^2$, folglich $ON^2 + MN^2 > ON^2 + CN^2$, d. i. $OM^2 > OC^2$, folglich OM > OC, mithin liegt der Punkt O (3. Satz, Zus.) folglich die Linie DON selbst innerhalb der Parabel, und schneidet mithin, da sie nicht selbst der Durchmesser DA ist, die Parabel in 2 Punkten (6. Satz.)

Es theile nun β.) eine Linie DT den Winkel CDA in 2. ungleiche Theile, so, daß TDC > TDA ist. Man fälle aus dem Brennpunkt C auf TD das Perpendikel CT, das verlängert der Directrix in einem Punkt Y begegnen wird, so, daß BY > BA ist. Aus Y errichte man auf die Directrix ein Perpendikel YU, das der verlängerten Linie TD irgendwo in U begegnen wird. Weil nun DY > DA d. i. > DC, mithin $TY^2 + TD^2 > TC^2 + TD^2$, folglich $TY^2 > TC^2$, mithin $TY^2 + TU^2 > TC^2 + TU^2$, oder $UY^2 > CU^2$, so ist UY > CU, mithin fällt der Punkt U, folglich die Verlängerung der Linie TD innerhalb der Parabel, mithin schneidet TD die Parabel in 2. Punkten (6. Satz.)

Daß aber auch jede innerhalb des Winkels CDZ durch D gehende gerade Linie der Parabel wieder begegne, erhellet ebenfalls aus 6. Satz. Denn da die Linien CD, und (4. Satz) DZ innerhalb der Parabel liegen, so geht auch jede den Winkel CDZ schneidende Linie durch einen Punkt innerhalb der Parabel.

Bemerk. Das hier unter No. 1. b. und No. 2. b. gesagte ist Simsons 7ter Satz, mit einem andern Beweis, nur wird dort ausdrücklich die Bestimmung des andern Punkts hinzugefügt, in welchem die Linien DN, DT die Parabel noch schneiden, die hier schon aus 6. Satz erhellet.

1. Zus. Durch einen Punkt einer Parabel kann man nur eine Berührungslinie an dieselbe ziehen. Diese wird senkrecht auf die Axe, d. h. parallel mit der Directrix seyn, wenn der Punkt ein Hauptscheitel ist: ist er diß nicht; so theilt die Berührungslinie immer den Winkel, den das von diesem Punkt auf die Directrix gefällte Perpendikel mit der von eben dem Punkt an den Brennpunkt gezogenen geraden Linie macht, in 2. gleiche Theile. (Ist Simsons 7ter Satz, Zus. und in Ansehung der letzten Behauptung Simsons 9ter Satz.)

2. Zus. Jede Tangente einer Parabel halbirt unter einem rechten Winkel die Linie CA, die von dem Brennpunkt C an den Punkt A der Directrix gezogen wird, auf welchen das von dem Berührungspunkt D auf die Directrix gefällte Perpendikel trift, und umgekehrt. Denn, da CD = AD, CDE = ADE, und DE gemeinschaftlich ist; so ist auch CE = AE, und bey E sind rechte Winkel. Umgekehrt, wenn CE = AE, und die Winkel bey E rechte sind; so geht in dem gleichschenklichten Dreyeck CAD, ED durch die Spitze desselben, und halbirt den Winkel CDA,

3. Zus. Zwey gerade Linien, die aus einem Punkt der Parabel D, innerhalb derselben, die eine DC an den Brennpunkt, die andere DZ parallel mit der Axe gezogen werden, machen mit der durch denselben Punkt der Parabel gezogenen Tangente gleiche Winkel, und umgekehrt. Denn, wenn ZDF = CDE; so ist auch der Scheitelwinkel ADE = CDE: und umgekehrt, wenn ADE = CDE; so ist auch der Scheitelwinkel ZDF = CDE.

4. Zus. Die Normallinie DV, d. h. das Perpendikel, das man auf der Tangente einer Parabel innerhalb derselben in dem Berührungspunkt errichtet, und bis zur Axe verlängert, halbirt den Winkel CDZ, den eine aus dem Berührungspunkt an den Brennpunkt gezogene Linie DC mit der aus demselben Punkt gezogenen Parallellinie mit der Axe macht, und umgekehrt. Denn, wenn der Winkel EDC = ZDF; so sind auch ih-

re Ergänzungswinkel zu einem rechten CDV, VDZ gleich, und umgekehrt. *)

5. Zus. Gerade Linien, welche an Punkten einer Parabel mit den Tangenten, oder Normalen Winkel machen, die beziehungsweise gleich sind denen, welche die Durchmesser daselbst mit den nemlichen Linien machen, gehen verlängert durch den Brennpunkt der Parabel, welcher eben daher seinen Nahmen hat. Denn, wenn eine gerade Linie WD den Winkel WDE = ZDF, oder WDV = VDZ und mithin WDE = EDA machen sollte, und doch verlängert nicht durch den Brennpunkt gienge; so würde die Berührungslinie den Winkel CDA nicht halbiren gegen 1. Zus.

6. Zus. Umgekehrt, alle gerade Linien, welche an Punkten einer Parabel mit den Tangenten oder Normalen Winkel machen, die beziehungsweise gleich sind denen, die die von diesen Punkten an den Brennpunkt gezogene Linien mit den Tangenten oder Normalen machen, sind Durchmesser der Parabel. (Die beyden letzten Zusätze, sind, was die Tangenten betrift, bey Simson 9. Satz 1. Zus.)

7. Zus. Wenn man aus irgend einem Punkt der Parabel D, der nicht der Hauptscheitel ist, eine Berührungslinie an die Parabel zieht, so ist der Winkel, den sie mit dem Durchmesser nach der Seite der Directrix hin macht, kleiner, als ein rechter. Denn der Winkel, den der Durchmesser mit der aus seinem Scheitel an den Brennpunkt gezogenen Linie macht, der der doppelte von dem Vorigen ist, ist kleiner als 2. rechte Winkel. (Simſ. 9ter Satz 2. Zus.)

8. Zus. Die Subtangente XJ einer Parabel, das heißt, das Stück ihrer Axe, das zwischen die Tangente DJ und das von dem Berührungspunkt auf die Axe gefällte Perpendikel DX

---

*) Bemerk. Für den Hauptscheitel fällt die Normallinie mit der Axe zusammen, mithin hat sie in diesem Fall keine bestimmte Länge. Daher kann dann auch nicht von einer Subnormallinie s. 10. Zus. oder Subtangente s. 8. Zus. die Rede seyn.

fällt, ist immer das doppelte der Abscisse der Axe HX, welche zwischen dem nemlichen Perpendikel DX und dem Hauptscheitel der Parabel abgeschnitten ist, und umgekehrt. Denn, wenn der Winkel JDC = JDA = dem Wechselswinkel DJC; so ist CJ = CD = DA = BX. Nun ist aber auch CH = HB (1. Satz, 1. Zus.) mithin ist HJ = HX, folglich XJ = 2 HX.

Umgekehrt, wenn XJ = 2 HX, mithin HJ = HX, folglich CJ = BX = DA = CD; so ist der Winkel CDJ = CJD = JDA, mithin DJ eine Tangente. (Der 1ste Theil dieses Zus. ist Simsons 10ter Satz.)

9. Zus. AD, oder der 4te Theil des Parameters irgend eines Durchmessers ist mithin um die halbe Subtangente HX grösser, als BH der 4te Theil des Haupt-Parameters; oder: jeder halbe Parameter ist um die Subtangente seines Durchmessers grösser, als der halbe Haupt-Parameter; oder: jeder halbe Parameter ist gleich der Summe der Subtangente seines Durchmessers, und des halben Haupt-Parameters.

10. Zus. Die Subnormallinien VX einer Parabel, d. h. die Stücke der Axe, welche zwischen den 2. Perpendikeln liegen, wovon das eine DX aus einem Punkt der Parabel D auf die Axe gefällt, das andere VD an die Tangente in demselben Punkt gezogen wird, sind alle gleich, nemlich jede derselben ist gleich dem halben Haupt-Parameter der Parabel, und umgekehrt. Denn, wenn der Winkel EDC = EDA = ZDF, und mithin auch CDV = VDZ = DVC als Wechselswinkel; so ist CV = CD = DA = BX, mithin XV = CB = dem halben Haupt-Parameter (1, Satz 1. Zus.) Umgekehrt, wenn XV = CB, mithin CV = BX = DA = CD; so sind die vorhin genannte Winkel gleich.

11. Zus. JV ist mithin (Zus. 9. 10.) = dem halben Parameter des Durchmessers DA, mithin ist (8, VI. E. 3.) die Normale DV immer die mittlere Proportionallinie zwischen dem halben Parameter JV und dem halben Haupt-Parameter XV.

12. Zus. Da alle Tangenten der Parabel ausserhalb dersel-

ben nach einer Seite derselben hinfallen, so ist die Parabel nach der Seite der Tangenten hin überall erhaben, nach der entgegengesetzten Seite hin hohl (vgl. 5. Satz, 2. Zus. Diß ist Simsons 5ter Satz, 2. Zus.)

Satz 8. Aufg. (Bey Simson 5 S. 1. Z.) Figg. 4. a. b.

An eine Parabel, von der man den Brennpunkt C und die Directrix LM, mithin auch die Axe, den Hauptscheitel, Haupt-Parameter u. s. w. kennt, aus einem auf ihr gegebenen Punkt eine Tangente ziehen.

Auflös. und Beweis.

Wenn der gegebene Punkt der Hauptscheitel ist, so ziehe man durch denselben eine Parallele mit der Directrix (7. Satz No. 1.) Ist es ein anderer Punkt D; so fälle man entweder 1.) auf die Directrix das Perpendikel DA, ziehe DC an den Brennpunkt, und halbire den Winkel ADC (7. Satz No. 2.), oder 2.) man fälle auf die Directrix das Perpendikel DA, ziehe aus dem Brennpunkt die Linie CA, und halbire sie in E durch eine darauf senkrechte Linie (7. Satz, 2. Zus.), oder 3.) man fälle das Perpendikel DX auf die Axe, nehme auf der verlängerten Axe HJ = HX, und ziehe JD (7. Satz, 8. Zus.), oder 4.) man fälle das Perpendikel DX auf die Axe, nehme XV = BC, ziehe VD, und errichte in D ein Perpendikel JD darauf (7. Satz, 10. Zus.)

Satz 9. Aufg. Fig. 5.

An eine Parabel, deren Brennpunkt C, und Directrix Aa man kennt, aus einem ausserhalb derselben gegebenen Punkt T eine Tangente zu ziehen.

Auflös. und Beweis.

Aus dem Mittelpunkt T, mit dem Halbmesser TC beschreibe man einen Kreis, der, weil die Entfernung des Punkts T von der Directrix kleiner ist als TC (3. Satz) der Directrix in 2. Punkten A, a begegnen wird. Man ziehe die gerade Linien CA, Ca, die Sehnen des beschriebenen Kreises seyn werden, und fälle auf sie aus T dem Mittelpunkt des Kreises die Perpendikel

TE, Te: diese theilen die Sehnen CA, Ca beziehungsweise in 2. gleiche Theile, und berühren mithin beyde die Parabel (7. Satz 2. Zus.)

Satz 10. Aufg. (Simsons 6. S.) Fig. 4.

An eine Parabel, deren Brennpunkt C, und Directrix LA man kennt, eine Tangente zu ziehen, die mit einer der Lage nach gegebenen Linie ab, (die jedoch nicht parallel mit den Durchmessern seyn darf) gleichlaufe.

Man ziehe auf ab aus dem Brennpunkt die Linie Cc senkrecht, und Cc begegne verlängert der Directrix in A, was nach der Bedingung der Aufgabe immer geschehen wird. Man theile AC in E in 2 gleiche Theile, und ziehe ED parallel mit ab, folglich senkrecht auf CA; so berührt ED die Parabel (7. Satz 2. Zus.)

Satz 11. (Simsons 8. S.) Figg. 6. 7.

Wenn man aus C dem Brennpunkt einer Parabel auf eine gerade Linie LG ein Perpendikel CG fällt, das der Directrix in A begegnet, und, wenn das Stück CG zwischen dem Brennpunkt und der geraden Linie nicht grösser ist, als das Stück GA zwischen der geraden Linie und der Directrix; so begegnet LG der Parabel nothwendig.

1. Fall. Wenn CG = GA; so berührt LG die Parabel (7. Satz 2. Zus.) in dem Punkt, in welchem der durch A gezogene Durchmesser mit LG zusammentrift.

2. Fall. Ist aber CG < CA; so nehme man GH = GC, und, auf welcher Seite von A man will, AF oder Af so, daß $AF^2 = Af^2$ = dem Rechteck CAH, beschreibe durch die Punkte C, H, F einen Kreis, und ziehe durch F eine gerade Linie senkrecht auf AF, die der Linie LG in E begegne.

Weil nun AF^2 = dem Rechteck CAH; so berührt AF den Kreis in F, mithin liegt der Mittelpunkt des Kreises auf der Linie FE, und weil die Linie LG die Sehne CH unter einem rechten Winkel schneidet und halbirt; so liegt eben dieser Mittelpunkt auch auf LG, mithin auf dem Durchschnittspunkt E der Linien LG, FE: folglich ist EC = EF, mithin der Punkt

E in der Parabel (2. Satz.) Eben so ist, wenn man fe senkrecht auf die Directrix zieht, und fe der Linie LG in e begegnet, der Punkt e in der Parabel. Simsons Zus. zu diesem Satz ist schon oben in Satz 4. und Satz 6. enthalten.

Simsons Satz 9. s. oben 7. Satz 1. Zus. Ferner Sims. 9. Satz 1. 2. Zus. oben 7. Satz, 5. 6. 7. Zus. Ferner Sims. Satz 10. oben 7. Satz 8. Zus.

Satz 12.

(Sims. 11. S. mit denselben Zusätzen.) Fig. 7.

Jede gerade Linie Ee, die mit einer Tangente DK parallel gezogen wird, und deren Endpunkte E, e in der Parabel liegen, wird von dem durch D gezogenen Durchmesser AD halbirt, d. i. ist eine Ordinate für diesen Durchmesser.

Es begegne AD der Directrix AB in A, und aus E, e ziehe man an die Directrix die Perpendikular-Linien EF, ef, aus dem Brennpunkt C aber ziehe man CA, die der Linie Ee in G begegne, und beschreibe aus E mit dem Halbmesser EC einen Kreis, der der Linie CA wieder in H begegnen, und die Directrix in F berühren wird (2. Satz 5. Zus.), und ziehe DC. Weil nun DK senkrecht ist auf AC (7. Satz 2. Zus.) so ist auch Ee senkrecht darauf. Und weil E der Mittelpunkt des Kreises ist; so ist CG = GH (3. III. El.) mithin eC = eH; folglich geht ein aus e mit dem Halbmesser eC beschriebener Kreis auch durch H, und weil eC = ef; so geht er auch durch f. Weil aber Ff die Kreise berührt, und AHC sie schneidet; so ist AF^2 = Rchtk. CAH = Af^2, mithin AF = Af. Nun sind FE, AL, fe parallel, mithin LE = Le (2. VI. E.)

1. Zus. Und umgekehrt: wenn eine gerade Linie Ee, deren beide Endpunkte auf einer Parabel liegen, von einem Durchmesser AL halbirt wird; so ist sie parallel mit der Tangente, die durch den Scheitel D des Durchmessers geht. Denn es seye diese Tangente nicht mit Ee parallel, und man ziehe (Satz 10.) eine damit parallele Tangente; so müßte nach gegenwärtigem Satz ein durch den Berührungspunkt dieser letzten Tangente gezogener

Durch-

Durchmesser die Linie Ee halbiren. Nun halbirt sie aber auch der Durchmesser AL, und diß ist widersprechend.

2. Zus. Alle einem Durchmesser zugehörigen Ordinaten sind daher unter sich parallel.

3. Zus. Und wenn die Endpunkte von 2 oder mehreren Parallellinien in einer Parabel liegen; so halbirt der Durchmesser, der eine halbirt, auch die andere: denn die, die er halbirt, ist mit der Tangente parallel, mithin sind auch die übrigen Linien mit der Tangente parallel, und werden daher von dem Durchmesser halbirt.

4. Zus. Und umgekehrt: eine gerade Linie, welche zwey gerade Parallellinien, deren Endpunkte in einer Parabel liegen, halbirt, ist ein Durchmesser, Denn, wäre sie es nicht, so würde der Durchmesser, der die eine halbirt, auch die andere halbiren. Nun sind aber beyde auch durch eine andere gerade Linie halbirt, was widersprechend ist. Und jede gerade Linie, die man von dem Berührungspunkt so zieht, daß sie eine mit der Tangente parallele Linie halbirt, deren Endpunkte in der Parabel liegen, ist ein Durchmesser. Denn, wäre sie es nicht; so ziehe man einen Durchmesser durch den Berührungspunkt; so wird auch dieser die mit der Tangente parallele Linie halbiren, was ungereimt ist.

5. Zus. Eine gerade Linie, die durch den Scheitel eines Durchmessers mit den Ordinaten parallel gezogen wird, berührt die Parabel. Dieß erhellt aus Zus. 1.

Satz 13.

(Ist mit den 3 ersten Zusätzen Simsons 12ter nebst seinen Zusätzen.)

Wenn aus einem Punkt einer Parabel eine Linie senkrecht an einen Durchmesser, und aus demselben Punkt eine Ordinate an diesen Durchmesser gezogen wird; so ist das Quadrat der Perpendikularlinie gleich dem Rechteck zwischen der Abscisse und dem Hauptparameter.

1. Fall. Wenn der Durchmesser die Axe ist. Es sey Fig. 8. aus dem Punkt D die Linie DH senkrecht auf die Axe BC gezo-

gen; so ist DH parallel mit der Berührungslinie durch den Hauptscheitel (Satz 7.), und mithin eine halbe Ordinate der Axe (Satz 12.). Man ziehe DC an den Brennpunkt und DA senkrecht an die Directrix AB, und es seye F der Hauptscheitel. Weil nun $HB = DA = DC$; so ist $HB^2 = DC^2 = DH^2 + HC^2$. Aber weil $BF = FC$; so ist auch $HB^2 = 4$ Rchtk $HFC + HC^2$ (8, II. El.) Mithin ist $DH^2 + HC^2 = 4$ Rchtk $HFC + HC^2$, folglich $DH_2 = 4$ Rchtk HFC d. i. = dem Rechteck zwischen der Abscisse HF, und dem Parameter der Axe (4 Erkl.)

(Kürzer so. Fig. 1. ist $SY^2 = SC^2 - CY^2 = (SC + CY)(SC - CY) = (HY + HC + CY)(HY + HC - CY)$ (1. Satz 3. Zus.) $= 2\,HC.\,2\,HY = 4\,HC.\,HY$.)

2. Fall. Es seye Fig. 7. EN senkrecht auf den Durchmesser AD, und EL eine Ordinate an diesen Durchmesser, und D seye der Scheitel des Durchmessers. Man ziehe DK mit EL parallel; so berührt (12 Satz, 5. Zus.) DK die Parabel in D. Es begegne DK der Axe in K, und EF seye senkrecht auf die Diretrix. Man beschreibe aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EF einen Kreis, der die Directrix in F berühren, und durch den Brennpunkt C gehen wird. Man ziehe die Linie AC, die dem Kreis wieder in H, und den geraden Linien DK, LE in den Punkten P und G begegne, endlich schneide LE die Axe in O. Weil nun (7. Satz, 2. Zus.) CPK ein rechter Winkel ist, und eben so CBA, und noch der Winkel BCA den Dreyecken BCA, PCK gemeinschaftlich ist; so sind diese Dreyecke gleichwinklicht, mithin $AC : CB = CK : CP$ d. i. wegen der Parallelen $= OK : GP$. Mithin Rchtk $AC \times GP = OK \times CB$. Weil aber $AC = 2CP$ (7. Satz, 2. Zus.) und $CH = 2CG$; so ist $AH = 2GP$, mithin Rchtk $AC \times AH = 2AC \times GP = 2OK \times CB$. Aber es ist auch $EN_2 = FA^2 = AC \times AH = 2OK \times CB$ d. i. = dem Rchtk zwischen der Abscisse DL und dem Parameter der Axe.

1. Zus. Daher verhalten sich die Quadrate der Perpendikel von irgend beliebigen Punkten der Parabel auf irgend beliebige Durchmesser zu einander, wie die Abscissen zwischen den Schei-

teln der Durchmesser, und den aus denselben Punkten an sie gezogenen Ordinaten.

2. Zus. Und die Quadrate der einerley Durchmesser zugehörigen Ordinaten verhalten sich, wie die ihnen zugehörigen Abscissen desselben Durchmessers. Denn es seyen EL, QR an den Durchmesser DN gezogene halbe Ordinaten, und EN, QS auf ihn gefällte Perpendikel; so ist (wegen der gleichwinklichten Dreyecke ELN, QRS) $EL^2 : QR^2 = EN^2 : QS^2 = DL : DR$ (vorherg. Zus.)

3. Zus. Und, wenn aus den Scheiteln zweyer Durchmesser Ordinaten an die Durchmesser gezogen werden; so sind die beiderseitigen Abscissen gleich, weil nemlich die Perpendikel von den Scheiteln der Durchmesser auf einander gleich sind.

4. Zus. Der Hauptparameter einer Parabel ist die dritte geometrische Proportionallinie zu irgend einer Abscisse der Axe und der ihr zugehörigen halben Ordinate — oder zu einer Abscisse irgend eines Durchmessers, und dem Perpendikel, das man aus dem korrespondirenden Punkt der Parabel auf diesen Durchmesser fällen kann.

Satz 14. Fig. 7.

(Ist mit den 2 ersten Zusätzen Simsons 13ter nebst seinen Zusätzen.)

Wenn aus einem Punkt E einer Parabel an einen Durchmesser DL eine halbe Ordinate EL gezogen wird; so ist das Quadrat dieser halben Ordinate gleich dem Rchtk zwischen der Abscisse DL und 4AD, oder dem Parameter dieses Durchmessers.

Man ziehe DK parallel mit EL, so berührt DK die Parabel. An die Axe ziehe man das Perpendikel DM, und aus U dem Scheitel der Axe an den Durchmesser DL die halbe Ordinate UT, die mithin mit EL parallel ist. Weil nun $UT = DK$; so ist $UT^2 = DK^2 = DM^2 + MK^2$. Aber $DM^2 = 4MU \times UB$ (vorherg. Satz 1. Fall), und $KM^2 = 4UM^2$ (7 Satz, 8. Zus.). Mithin ist $UT^2 = 4UM \times MB$ (3, II. El.). Aber $UM = UK = DT$, und $MB = DA$, mithin ist $UT^2 = 4\,AD \times DT$. Und da

nach vorherg. Satz, 2 Zus. $UT^2 : EL^2 = DT : DL = AD \times DT : AD \times DL$; so ist, weil $UT^2 = 4AD \times DT$, auch $EL^2 = 4AD \times DL$. Eben darum nannte Apollonius diese Linie eine **Parabel**. (Ueberhaupt nemlich sagten die alten griechischen Mathematiker ein Raum z. B. das Quadrat von EL liege an einer Linie 4AD, oder ὅτι τὸ χωρίον παραβάλλει τὴν γραμμὴν, wenn ein über der Linie 4AD verzeichnetes Rechteck, das eine gegebene Höhe DL hatte, oder das Rchtk $4AD \times DL$ gleich war dem Raum. War hingegen das über 4AD verzeichnete Rchtk von gegebener Höhe kleiner als der Raum, und mußte sich mithin ein diesem Raum gleiches Rechteck über die Linie 4AD hinaus erstrecken, dann sagten sie: ὅτι τὸ χωρίον ὑπερβάλλει τὴν γραμμὴν — in dem diesem entgegengesetzten Fall endlich: ὅτι ἐλλείπει —).

1. Zus. Umgekehrt, wenn man aus einem Punkt E eine gerade Linie EL an einen Durchmesser der Parabel AD parallel mit seinen Ordinaten zieht, so daß EL dem Durchmesser unterhalb seines Scheitels D in L begegnet, und wenn $EL^2 = 4AD \times DL$; so liegt E auf der Parabel. Denn, weil L innerhalb der Parabel liegt (4 Satz); so muß EL der Parabel nothwendig begegnen (Satz 6.). Wäre dieß nicht in E, nemlich auf der Seite des Durchmessers, auf welcher E liegt; so wäre es in einem andern dem Durchmesser nähern oder von ihm entferntern Punkt ϵ, dann wäre aber $\epsilon L^2 = 4AD \times DL = EL^2$, welches ungereimt ist.

2. Zus. Und, wenn aus 2 Punkten E, Q, von denen der eine z. B. Q in der Parabel liegt, an einen Durchmesser AD die Linien EL, QR parallel mit seinen Ordinaten gezogen werden, und die Quadrate dieser Linien sich verhalten, wie die ihnen zugehörigen Abscissen DL, DR; so liegt auch der andere Punkt E in der Parabel. Denn, weil $QR^2 : EL^2 = DR : DL = 4AD \times DR : 4AD \times DL$, und $QR^2 = 4AD \times DR$; so ist auch $EL_2 = 4AD \times DL$; mithin E in der Parabel (vorherg. Zus.)

3. Zus. Der Parameter eines jeden Durchmessers ist die 3te geometrische Proportionallinie zu irgend einer Abscisse dieses Durchmessers und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

4. Zus. Die Abscisse eines jeden Durchmessers, die zwischen seinem Scheitel und der ihm zugehörigen Ordinate liegt, die durch den Brennpunkt geht, ist gleich dem 4ten Theil des Parameters dieses Durchmessers: und die Ordinate eines jeden Durchmessers, die durch den Brennpunkt geht, ist gleich dem Parameter dieses Durchmessers. Nemlich wenn VW die Hälfte dieser Ordinate ist; so ist DW = CK = CD (7 Satz, 8 Zus. Bew.) = AD. Mithin $VW^2 = 4AD \times DW = 4AD^2$, und VW = 2AD, folglich die ganze Ordinate = 4AD.

Satz 15. (Simſ. 14 S.) Fig. 9.

Wenn man aus einem Punkt A an einen Durchmesser BC eine Ordinate AC, und aus demselben Punkt A an die Parabel eine Berührungslinie AD zieht, die dem Durchmesser in D begegnet; so theilt der Scheitel des Durchmessers B das Stück CD zwischen der Tangente und der Ordinate in zwey gleiche Theile.

Denn man ziehe aus B die Linie BE parallel mit AD; so ist diese eine halbe Ordinate des Durchmessers AE (12 Satz), mithin ist die Abscisse BC = der Abscisse AE (13 Satz, 3 Zus.) = BD. (Dieser Satz ist Verallgemeinerung von 7 Satz, 8. Zus.)

1. Zus. (Simſ. 13.) Und umgekehrt: Wenn AC eine Ordinate an BC ist, und AD so gezogen wird, daß BD = BC; so berührt AD die Parabel. Denn, wenn die Linie AD die Parabel nicht berührt, so berühre sie AF; so ist FB = BC = BD, was unmöglich ist.

2. Zus. (Simſ. 2. Z.) Das Stück einer Berührungslinie AD zwischen dem Berührungspunkt A und irgend einem Durchmesser BC wird von der an den Scheitel dieses Durchmessers B gezogenen Berührungslinie BG in G halbirt. Denn man ziehe AC parallel mit BG; so ist AC eine Ordinate an BC (12 Satz), mithin ist CB = BD, folglich auch AG = GD.

Satz 16.

Aufg. (Simsons 15 S.) Fig. 10.

In einer vorgegebenen Parabel die Durchmesser, die Axe, den Hauptparameter, den Brennpunkt und die Directrix zu finden.

Man ziehe 2 gerade von der Parabel begränzte Parallelen

AB, CD, halbire sie in E, F, ziehe die Linie EF, die der Parabel in G begegne; so ist GF ein Durchmesser der Parabel (12 Satz 4 Zus.) Man nehme nun (wenn nicht etwa GF senkrecht ist auf AB,CD, in welchem Fall GF selbst die Axe ist,) irgend einen Punkt H auf dem Durchmesser unter seinem Scheitel, und ziehe KHL senkrecht auf den Durchmesser, die der Parabel in K, L begegne, durch den auf der Mitte der Linie KL liegenden Punkt M ziehe man parallel mit dem Durchmesser die Linie MN, die der Parabel in N begegne, und noch NO parallel mit MH. Weil nun MN parallel ist mit GH; so ist MN ein Durchmesser. Aber KL ist eine Ordinate dieses Durchmessers, mithin berührt NO die Parabel in N (12 Satz 5 Zus.). Und, weil MNO ein rechter Winkel ist; so ist MN die Axe (7 Satz 7 Zus.) Die 3te Proportionallinie zu NM, und MK ist dann der Hauptparameter (13 Satz 4 Zus.), und der 4te Theil dieses Parameters ist gleich der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt N (6te Erkl. und 1 Satz, 1 Zus.). Mithin ist der Brennpunkt gegeben, und eben so läßt sich die Directrix finden.

Satz 17. Aufg. (Simsons 16 S.)

Wenn die Lage der Directrix und der Brennpunkt einer Parabel gegeben sind, sie beschreiben. Diß geschieht, wie in der 1sten Erklär. oder wie im 2 Satz 1 Zus. gezeigt worden ist.

Zus. (Sims. 3.) Eben so kann, wie man leicht sieht, die Parabel beschrieben werden, wenn die Lage der Directrix, und der Hauptscheitel — oder, wenn der Hauptscheitel und der Brennpunkt — oder wenn die Lage der Axe, der Hauptscheitel, und der Hauptparameter — oder, wenn die Lage der Axe, der Brennpunkt und der Hauptparameter gegeben sind.

Satz 18. Aufg. (Simsons 17 S.) Fig. 11.

Wenn die Lage der Axe FH, ihr Scheitel F, und außerhalb der Axe, aber unterhalb des Scheitels F (d. h. innerhalb eines der Winkel, den ein durch den Hauptscheitel auf die Axe errichtetes Perpendikel mit der Axe macht,) ein Punkt D gegeben ist; eine Parabel beschreiben, die durch den Punkt D gehe.

Man fälle aus D auf die Axe das Perpendikel DG, und finde zu FG, GD die 3te Proportionallinie FK. Man mache FB = dem vierten Theil von FK und FC = FB, ziehe BA mit DG parallel, und beschreibe eine Parabel, deren Brennpunkt C, und deren Directrix AB seye; so wird diese durch D gehen. Denn weil GF, GD, FK proportional sind; so ist GD^2 = Rchtk GF × FK, und FK ist der Parameter der Axe FG (6te Erkl.), mithin liegt der Punkt D in der Parabel (14 Satz 1. Zus.)

1. Zus. Auf ähnliche Art kann man, wenn Fig. 7. die Lage eines Durchmessers DR, der Scheitel des Durchmessers D, der Winkel, den die Ordinaten mit dem Durchmesser machen (der Ordinatenwinkel) und ein Punkt E außerhalb des Durchmessers, aber innerhalb eines der Winkel, den eine aus dem Scheitel des Durchmessers unter dem Ordinatenwinkel an den Durchmesser gezogene Linie mit diesem macht, gegeben sind — man kann, sage ich, eine Parabel beschreiben, die den gegebenen Durchmesser habe, und durch den gegebenen Punkt gehe. Man ziehe nemlich DK unter dem gegebenen Ordinatenwinkel an DR, und parallel mit DK die Linie EL, suche zu DL und LE, die 3te Proportionallinie, und nehme DA = dem vierten Theil derselben, mache den Winkel KDC = KDA, und nehme DC = DA. Durch A errichte man AB senkrecht auf AD, und beschreibe eine Parabel, die AB zur Directrix und C zum Brennpunkt habe; so ist diese, wie sich leicht erweisen läßt, die verlangte.

3. Zus. Eine krumme Linie, die einen Durchmesser hat, dessen Abscissen sich verhalten, wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten oder halben Ordinaten, ist eine Parabel. Denn man beschreibe (vor. Zus.) eine Parabel, die den gegebenen Durchmesser, Scheitel und Ordinatenwinkel habe, und durch den Endpunkt einer der Ordinaten gehe; so geht sie auch durch die Endpunkte aller übrigen Ordinaten (14 Satz 2. Zus.) und ist mithin mit der vorgegebenen krummen Linie einerley.

Satz 19. Aufg. (Simſ. 18 S.) Fig. 12.

Wenn die Lage von 2 geraden Linien AB, AC, die ſich in A begegnen, und die Größe einer Linie DE gegeben iſt, eine Parabel beſchreiben, von welcher AB ein Durchmeſſer und der ihm zugehörige Parameter die Linie DE ſeye, und welche die Linie AC berühre.

Man mache AG = dem 4ten Theil von DE, ziehe durch G ein Perpendikel GH auf GA, mache den Winkel CAK = CAG, nehme AK = AG, und beſchreibe eine Parabel, deren Directrix die Linie GH und deren Brennpunkt K ſeye; ſo iſt AB ein Durchmeſſer der Parabel, und der Parameter dieſes Durchmeſſers iſt = 4AG = DE (4 und 6. Erkl.) und weil AG = AK; ſo liegt A in der Parabel (2 Satz) und, da GAC = CAK, ſo berührt AC die Parabel (7 Satz.)

1 Zuſ. (Simſ. 3.) Wenn daher aus einem Punkt L an eine der Lage nach gegebene gerade Linie AB, auf welcher ein Punkt A gegeben iſt, eine gerade Linie LM unter einem gegebenen Winkel LMA gezogen wird, und wenn LM^2 = dem Rchtk zwiſchen der Abſciſſe AM und einer der Größe nach gegebenen Linie DE; ſo liegt L auf einer der Lage nach gegebenen Parabel. Denn man ziehe durch A die Linie AC mit LM parallel, und beſchreibe (19 Satz) eine Parabel, von der AB ein Durchmeſſer, DE ſein Parameter ſeye, und welche die Linie AC berühre; ſo iſt dieſe Parabel der Ort der Punkte L: denn, weil nach der Vorausſetzung $LM^2 = AM \times DE$, und LM mit der Tangente AC, mithin mit den Ordinaten dieſes Durchmeſſers gleichlauft; ſo liegt L auf der Parabel (14 Satz, 1 Zuſ.)

2. Zuſ. Auf den vorigen Zuſ. gründet ſich die von Menächmus herrührende Auflöſung der Aufgabe: zwiſchen 2 gegebenen Linien P, Q zwei mittlere geometriſche Proportionallinien zu finden. Fig. 13. Es heiſſe die erſte dieſer mittlern Proportionallinien X, die 2te Y; ſo ſoll mithin ſeyn P : X = X : Y = Y : Q, mithin muß ſowohl $Y^2 = Q.X$, als $X^2 = P.Y$ ſeyn. Dieſe Bedingungen nun werden erfüllt durch folgende Konſtruction. Man nehme irgend eine Linie AB als Axe, und auf ihr einen Punkt A

als Hauptscheitel an, und beschreibe (17 Satz, Zus.) eine Parabel AED, die die Axe AB, den Hauptscheitel A, und den Parameter Q habe; so haben alle halbe Ordinaten Y der Axe die Eigenschaft, daß ihr Quadrat gleich ist dem Rechteck zwischen dem Parameter Q, und den diesen Ordinaten zugehörigen Abscissen X, oder es ist $Y^2 = Q.X.$ Nun ziehe man AC senkrecht auf AB, und beschreibe eine 2te Parabel AFD, die die Axe AC, den Hauptscheitel A, und den Parameter P habe; so haben alle halbe Ordinaten dieser Parabel X, die Eigenschaft, daß ihr Quadrat gleich ist dem Rchtk zwischen dem Parameter Q, und den Abscissen Y, oder es ist $X^2 = P.Y.$ Mithin wird der Punkt D, in welchem sich die beyde Parabeln schneiden, die Aufgabe auflösen. Es ist nemlich, wenn man aus D in beyden Parabeln die halbe Ordinaten an die Axe d. h. die Perpendikel DB, DC zieht, in der Parabel AED, $BD_2 = AB.Q$, in der Parabel AFD aber $CD^2 = AC.P.$ Aber $CD = AB$, und $AC = BD$, mithin $AB^2 = BD.P$, folglich ist AB die erste, BD die 2te der mittlern Proportionallinien zwischen P und Q.

Man hat von dieser berühmten Aufgabe noch mehrere andere Auflösungen.

Satz 20. (Simsons 19. S.) Fig. 12.

Es ist die Lage des Durchmessers AB, sein Scheitel A, und eine gerade Linie LM, die dem Durchmesser unterhalb A in M begegnet, der Lage und Größe nach gegeben; eine Parabel zu beschreiben, die durch den Punkt L gehe, und in welcher LM eine dem Durchmesser AB zugehörige Ordinate seye.

Durch den Scheitel A ziehe man AC parallel mit LM, und es seye DE die 3te Proportionallinie zu AM, LM. Man beschreibe (vorh. Satz) eine Parabel, deren Durchmesser AB, und der ihm zugehörige Parameter DE seye, und die die Linie AC in A berühre. Weil dann ML parallel ist mit AC; so ist ML eine dem Durchmesser AB zugehörige Ordinate, und weil AM, ML, DE proportional sind; so ist $ML^2 = AM \times DE$, mithin der Punkt L in der Parabel (14 Satz, 1. Zus.)

Satz 21. (Simsons 20 S.) Fig. 14.

Es ist die Lage des Durchmessers einer Parabel (der aber nicht die Axe seyn darf) und sein Scheitel, ausserdem die Größe des diesem Durchmesser zugehörigen Parameters, und ein Punkt, der in der Parabel liegen soll, gegeben: die Parabel zu beschreiben.

Es seye AB der Durchmesser und A sein Scheitel, auf der über A hinaus verlängerten Linie AB nehme man AC gleich dem gegebenen Parameter, und der Punkt, durch den die Parabel gehen solle, seye D. Man denke sich die Sache geschehen, es seye nemlich AD die zu beschreibende Parabel, AE berühre die Parabel in A, und begegne dem durch D gezogenen Durchmesser in E. Man ergänze das Parallelogramm AEDF, so ist DF eine Ordinate des Durchmessers AB, mithin ist $DF^2 = AE^2 = FA \times AC$, folglich $\left.\begin{matrix}FA\\DE\end{matrix}\right\}: AE = AE : AC$, und da die Winkel DEA, EAC als Wechselwinkel gleich sind; so sind die Dreyeke DEA, EAC gleichwinklicht (6, VI. El.), mithin ist der Winkel AEC = EDA = FAD. Aber der Winkel FAD ist gegeben, weil FA, AD der Lage nach gegeben sind (29 Dat.), folglich ist der Winkel AEC gegeben, nnd da AC der Lage und Größe nach gegeben ist; so liegt der Punkt E auf einem der Lage nach gegebenen Kreisbogen, nemlich auf dem über AC beschriebenen eines Winkels AEC = FAD fähigen Kreisabschnitt. Aber E liegt auch auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie DE, mithin ist E, folglich auch die Lage von AE gegeben: mithin läßt sich nach dem 19ten Satz eine Parabel beschreiben, deren Durchmesser AB, sein Scheitel A, sein Parameter AC ist, und den die gerade Linie AE berührt.

Weil aber zur Komposition erfordert wird, daß über AC ein des gegebenen Winkels FAD fähiger Kreisabschnitt beschrieben werde, welcher einer durch D mit AB parallel gezogenen Linie begegnen soll, und diß nicht immer möglich ist, so läßt sich auch die Aufgabe nicht in allen Fällen auflösen: eine einzige Auflösung findet Statt, wenn die durch D mit AB gezogene Parallele den Kreisabschnitt berührt.

Die Parabel und der Parameter des Durchmessers AB, bey dem hienach nur eine einzige Auflösung Statt findet, lassen sich auf folgende Art bestimmen. Man denke sich die Sache geschehen. Es seye nemlich AG der Parameter des Durchmessers AB, der so beschaffen ist, daß, wenn man über demselben einen des gegebenen Winkels FAD oder ADE fähigen Kreisabschnitt beschreibt, die Linie DE diesen Kreisabschnitt in H berühre. Man ziehe die Linien AH, GH. Weil nun der Winkel AHD = AGH (32, III. E.) und nach der Voraussetzung ADH = AHG; so sind die Dreyecke ADH, AHG gleichwinklicht, mithin DAH = HAG. Es ist aber der Winkel DAG gegeben, mithin auch seine Hälfte DAH; folglich ist die Lage von AH gegeben (32 Dat.), mithin auch der Punkt H (28 D.) in welchem sie der der Lage nach gegebenen DE begegnet, und da der Winkel AHG gegeben ist; so ist die Lage von HG (32 D.) mithin der Punkt G (28 D.) folglich die Größe der Linie AG (29 D.) gegeben. Und weil AG der Parameter ist des Durchmessers AB, der A zum Scheitel hat, und der einer durch den Punkt D gehenden Parabel zugehört; im Vorhergehenden aber gezeigt worden ist, daß die durch den Scheitel A an die Parabel gezogene Berührungslinie dem durch D gezogenen Durchmesser in dem über dem Parameter des Durchmessers AB beschriebenen, des Winkels ADH fähigen Kreisabschnitt begegne; so berührt HA die Parabel in A, und wenn die Lage von AB, AH, und die Größe von AG gegeben sind; so läßt sich (19 Satz) die Parabel beschreiben.

Die Komposition für diesen besondern Fall ist nun diese: Man ziehe AD, und durch D die Linie DE mit AB parallel, theile den Winkel DAG durch AH in 2 gleiche Theile, durch H ziehe man an AB eine Linie HG unter einem Winkel AHG = ADH = FAD, und beschreibe (19 Satz) eine Parabel, deren Durchmesser AB, der ihm zugehörige Parameter die Linie AG seye, und welche die Linie AH berühre; so wird sie durch D gehen, und DH wird den um AHG beschriebenen Kreis berühren. Denn man ziehe DK gleichlauffend mit AH. Weil nun wegen

der gleichwinklichten gleichschenklichten Dreyecke DAH, HAG die Linien DH, HA, AG, mithin auch KA, KD, AG proportional sind; so ist $KD^2 = KA \times AG$. Nun ist KD parallel mit der Tangente AH, mithin liegt D in der Parabel (14ter Satz, 1. Zus.). Und, weil der Winkel AHD = AGH (32, III E.); so berührt DH den Kreis in H (umgek. Satz von 32, III.)

Nun ist ferner zu untersuchen, ob der Parameter AG grösser oder kleiner seye, als der Parameter des Durchmessers AB in einer jeden andern Parabel, die AB zum Durchmesser, A zum Scheitel desselben hat, und durch den Punkt D geht. Es seye mithin irgend eine andere Parabel der Art, und AE berühre sie in A, und begegne dem durch D gezogenen Durchmesser in E, dem Kreis AHG aber in L, (welches immer geschehen wird, da AB nicht die Axe, mithin (7 Satz, 7. Zus.) AE nicht senkrecht auf AG ist) und man ziehe EC parallel mit LG, DF parallel mit EA. Es ist mithin DF eine dem Durchmesser AB zugehörige Ordinate, und weil der Winkel ADE = AHG = ALG = AEC, und DEA = EAC; so sind die Dreyecke EDA, AEC gleichwinklicht, mithin ist DE : EA = EA : AC d. h. AF : DF = DF : AC, folglich $DF^2 = AF \times AC$, mithin ist AC der Parameter des Durchmessers in dieser Parabel. Und, weil DE den Kreis in H berührt; so ist AL < AE, mithin AG < AC. Es ist mithin AG der kleinste Parameter des Durchmessers AB unter den vorhin erwähnten Parabeln. Und eben so wird gezeigt, daß die Parameter des Durchmessers AB in Parabeln, welche gerade durch A gezogene Linien berühren, die nach beyden Seiten entferner von AH liegen, immer größer seyen, als die Parameter in Parabeln, welche gerade der Linie AH nähere Linien in A berühren.

Die allgemeine Auflösung ist nun folgende: Man finde AG, wie es im Vorhergehenden gesagt worden ist. Wenn nun der vorgegebene Parameter gleich ist AG; so beschreibe man die Parabel auf die angezeigte Art, und sie allein wird der Aufgabe entsprechen. Ist der vorgegebene Parameter kleiner als AG; so ist die

Aufgabe unmöglich. Ist endlich der vorgegebene Parameter AC größer als AG; so beschreibe man über AC einen des gegebenen Winkels ADH, oder FAD fähigen Kreisabschnitt. Weil nun DH den Kreis AHG berührt; so schneidet sie nothwendig den über AC beschriebenen Kreisabschnitt in 2 Punkten. Der eine derselben seye E, man ziehe AE, und beschreibe eine Parabel, deren Durchmesser AB, der ihm zugehörige Parameter die Linie AC seye, und welche die Linie AE berühre (19 Satz.). Man ziehe DF parallel mit AE; so wird wie vorhin gezeigt, daß AF : FD = FD : AC, und mithin $FD^2 = AF \times AC$ seye, daß mithin die Parabel durch D gehe. Eben diß läßt sich dann auch beweisen von der andern Parabel, welche die Linie, die durch A und den andern Durchschnittspunkt e gezogen wird, berührt. Uebrigens, da im Vorhergehenden gezeigt worden ist, daß GAH = HAD seye; so ist auch AKD = ADK, mithin AK = AD. Es ist aber AG die 3te Proportionallinie zu AK, und KD d. h. zu AD und KD, d. h. der kleinste Parameter ist die 3te Proportionallinie zu der geraden Linie, welche von dem Scheitel des vorgegebenen Durchmessers A an den gegebenen Punkt D gezogen wird, und zu der Linie DK, welche von demselben Punkt an den Durchmesser so gezogen wird, daß sie ein Stück AK = AD von ihm abschneidet.

Aus Apollonius von Pergen Istem Buch von den Kegelschnitten die 9 ersten Erklärungen.

Apollon. I. Erkl. (Simſ. 8.) Wenn man aus einem Punkt an den Umfang eines Kreises, der nicht in einerlei Ebene mit dem Punkt liegt, eine gerade Linie zieht, und sie nach beyden Seiten hin verlängert, und wenn man diese Linie, ohne daß der Punkt sich verrückt, sich um den Umfang des Kreises drehen läßt, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkommt: so nenne ich die von der geraden Linie beschriebene Oberfläche, die aus 2 im Scheitel an einander stossenden Flächen besteht, deren jede unendlich weit verlängert werden kann, wenn man nemlich die gerade Linie unendlich weit verlängert, eine K e g e l o b e r f l ä c h e.

II. (9.) Den unverrückten Punkt nenne ich i h r e n S c h e i t e l.

III. (10.) Die gerade Linie, die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises geht, ihre Axe.

IV. (11.) Den körperlichen Raum aber, der enthalten ist zwischen dem Kreise, und der Kegeloberfläche, so weit diese zwischen dem Scheitel und dem Kreise liegt, nenne ich einen Kegel.

V. (12.) Eben der Punkt, der der Scheitel der Kegeloberfläche ist, heißt auch auch Scheitel des Kegels.

VI. (13.) Eben so heißt dieselbe Linie, welche Axe der Kegeloberfläche ist, auch Axe des Kegels.

VII. (14.) Der Kreis selbst die Grundfläche des Kegels.

VIII. (15.) Geradstehende Kegel nenne ich solche, deren Axen mit den Grundflächen rechte Winkel machen.

IX. (16.) Schiefstehende aber, in welchen diß nicht der Fall ist.

Satz 22.

(Simſ. 21. S. Apollonius 1ster des Isten Buchs) Fig. 15.

Jede gerade Linie AC, die aus dem Scheitel der Kegeloberfläche A an irgend einen Punkt B der Kegeloberfläche gezogen wird, liegt in dieser Oberfläche.

Denn, wenn es möglich ist, seye sie nicht in dieser Oberfläche, und die gerade Linie, welche die Oberfläche beschreibt, seye DE, der Kreis, um den sie sich dreht, seye EF. Indem sie sich also um den unverrückten Punkt A herumdreht, wird sie einmal durch den Punkt B kommen, und 2 gerade Linien ACB, AGB werden 2 Punkte A, B gemeinschaftlich haben, welches unmöglich ist. Mithin kann die Linie AC nicht ausserhalb der Kegeloberfläche liegen, folglich muß sie in derselben liegen.

Zus. (Simſ. 3.) Und wenn aus dem Scheitel eine gerade Linie an einen Punkt {innerhalb / ausserhalb} der Kegeloberfläche gezogen wird; so liegt sie selbst {innerhalb / ausserhalb} dieser Oberfläche.

Satz 23.

(Simsons 22 S. Apollon. 3ter des Isten B.) Fig. 16.

Wenn ein Kegel von einer Ebene, die durch seinen Scheitel geht, geschnitten wird; so ist der Schnitt ein Dreyeck.

Der Kegel, dessen Scheitel A, und Grundfläche der Kreis BDC ist, werde von einer Ebene, die durch den Scheitel A geht, geschnitten, und die Durchschnittslinien dieser Ebene mit der Kegeloberfläche seyen die Linien AB, AC, die Durchschnittslinie mit der Grundfläche aber die gerade Linie BC (3, XI. El.) ich behaupte, ABC seye ein Dreyeck.

Denn, weil eine gerade Linie, die in der schneidenden Ebene von A nach B gezogen wird, nach dem vorherg. Satz auch in der Kegeloberfläche liegt; so ist sie die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und der Kegeloberfläche: oder diese gemeinschaftliche Durchschnittslinie AB ist eine gerade Linie, und eben so AC, aber auch BC, mithin ist ABC ein Dreyeck. *)

Satz 24.

(Simsons 23 S. Apollon. 4ter des Isten B.) Fig. 17.

Wenn eine der zu beyden Seiten des Scheitels A befindlichen Kegeloberflächen durch eine Ebene geschnitten wird, die parallel ist mit dem Kreis BC, um den sich die die Kegeloberfläche beschreibende gerade Linie dreht; so ist der Durchschnitt DLE dieser Ebene mit der Kegeloberfläche ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, der Körper aber, der von diesem Kreis und der Kegeloberfläche bis an den Scheitel hin begränzt wird, ist ein Kegel.

Denn man ziehe an den Mittelpunkt F des Kreises BC eine Linie AF; so ist AF die Axe (10te Erkl.), und begegnet der

*) Einige weitere interessante Bemerkungen über solche Schnitte eines Kegels durch seinen Scheitel s. in Kraft Geom. Sublim. Cap. II. wo jedoch die §. 33. und schon früher C. I. §. 29. vorkommende Behauptung, in dem schiefen Kegel seyen alle Seitenlinien ungleich, dahin zu beschränken ist, es seyen alle, auf einerley Seite des durch die Axe gehenden auf der Grundfläche senkrecht stehenden Dreyeks (dessen eine Seite die gröste, die andere die kleinste ist unter allen Seitenlinien des Kegels ebendas. §. 33.) ungleich, auf den 2 entgegengesetzten Seiten dieses Dreyecks aber immer 2 Seitenlinien des Kegels, die nemlich von der kleinsten oder grösten Seite gleichweit entfernt liegen, einander gleich, wie leicht aus 7, III. und 8, III. El. erhellet.

schneidenden Ebene. Diß geschehe in G, und man lege durch die gerade Linie AF irgend eine Ebene; so ist ihr Durchschnitt mit der Kegeloberfläche ein Dreyeck ABC (23. Satz). Und weil die Punkte D, G, E in der schneidenden Ebene DLE, und in der Ebene ABC liegen; so ist DGE eine gerade Linie (3, XI.. E.). Man nehme nun in der Linie DLE irgend einen Punkt H, ziehe AH, und verlängere sie; so wird sie dem Umkreis BC begegnen. Es geschehe diß in K, und man ziehe GH, FK. Weil nun die zwey parallele Ebenen DLE, BFC von der Ebene ABC geschnitten werden; so sind ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinien parallel (16, XI. E.), mithin DE parallel mit BC. Eben so ist GH parallel mit FK, folglich (4, VI. E.) AF : AG = FB:GD = FC:GE = FK:GH. Nun sind die 3 Linien FB, FC, FK unter sich gleich: folglich auch (14, V. El.) die 3. GD, GE, GH. Eben so zeigt man, daß alle Linien, die aus G an einen Punkt der Linie DLE gezogen werden, gleich seyen. Mithin ist DLE ein Kreis, dessen Mittelpunkt G in der Axe liegt.

Zugleich erhellet, daß der Körper, der von dem Kreis DLE und der Kegeloberfläche bis an den Scheitel hin begränzt wird, ein Kegel sey. Auch ist erwiesen worden, daß die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der schneidenden Ebene, und des durch die Axe gehenden Dreyeks der Durchmesser des Kreises sey.

Satz 25.

(Simsons 24. S. Apollon. 5ter des Isten B.) Fig. 18.

Wenn ein schiefstehender Kegel von einer durch die Axe gehenden und auf der Grundfläche BC senkrecht stehenden Ebene ABC, und dann wieder von einer andern auf der Ebene ABC senkrechten Ebene so geschnitten wird, daß diese nach der Seite des Scheitels hin ein Dreyeck AGK abschneidet, das dem ABC ähnlich ist, jedoch die Winkel an der Grundlinie verwechselt liegen hat, so daß der Winkel AKG = ABC, und AGK = ACB ist; so ist der Durchschnitt dieser 2ten Ebene mit der Kegeloberfläche ein Kreis. (Man nennt diesen Schritt sectio subcontraria, alterna, deutsch: Wechselschnitt, antiparalleler Schnitt).

Denn man nehme auf den Linien GHK, BLC irgend 2 Punkte H, L, von denen man auf die Ebene des Dreyecks ABC Perpendikel fälle; so fallen diese (38, XI. E.) auf die Durchschnitte der Ebenen GHK, BLC mit dem Dreyeck ABC. Gesetzt diese Perpendikel seyen HF, LM; so ist (6, XI. E.) HF parallel mit LM. Man ziehe durch F parallel mit BC die Linie DFE. Da nun auch HF mit LM parallel ist; so ist (15, XI. E.) die Ebene durch FH, DE parallel mit der Grundfläche des Kegels, mithin (24. Satz) der Schnitt DHE ein Kreis, dessen Durchmesser DE ist; folglich ist das Rchtk $DF \times FE = FH^2$. Und weil ED mit BC parallel ist; so ist der Winkel ADE = ABC. Aber nach der Voraussetzung ist AKG = ABC, mithin ist AKG = ADE. Und, da in den Dreyecken DFG, KFE auch noch die Scheitelwinkel bei F gleich sind; so sind diese Dreyecke ähnlich. Mithin ist EF : FK = GF : FD, folglich Rchtk $FK \times GF = DF \times FE = FH^2$. Eben so beweißt man nun, daß die Quadrate aller Perpendikel, die von Punkten der Linie GHK an GK gezogen werden, gleich seyen den Rchtken der Abschnitte, die sie auf GK machen. Mithin ist der Durchschnitt GHK ein Kreis, dessen Durchmesser GK ist (s. den gleichfolgenden 2ten Lehnsatz von Pappus zu dem Isten Buch des Apollonius.)

Satz 26.

(2ter Lehnsatz von Pappus von Alexandrien zum Isten Buch der Kegelschnitte des Apollonius) Fig. 19.

Es seye eine Linie ABC, und AC seye eine gerade der Lage nach gegebene Linie, und alle von der Linie ABC auf AC gefällte Perpendikel seyen so beschaffen, daß ihr Quadrat gleich seye dem Rchtk der von ihnen auf AC abgeschnittenen Stücke: ich behaupte, ABC seye der Umfang eines Kreises, und AC sein Durchmesser. Denn man ziehe von willkührlichen Punkten D, B, E der Linie ABC an AC die Perpendikel DF, BG, EH; so ist mithin DF^2 = Rchtk $AF \times FC$, und $BG^2 = AG \times GC$, und $EH^2 = AH \times HC$. Man theile AC in K in 2 gleiche Theile, und ziehe KD, KB, KE.

Weil nun $AF \times FC + FK^2 = AK^2$ (5, II. E.) aber $AF \times FC = DF^2$; so ist $DF^2 + FK^2$ d. h. (47, I. E.) $DK^2 = AK^2$, mithin $DK = AK$. Eben so wird gezeigt, daß jede der Linien BK, $EK = AK$ seye: mithin ist AKC der Umring eines Kreises, der K zum Mittelpunkt, mithin AC zum Durchmesser hat.

Satz 27. (Simsons 25 S.) Fig. 20.

Wenn ein Kegel von einer durch die Axe gehenden Ebene ABC, und dann von einer 2ten Ebene geschnitten wird, bey welcher 1) ihr Durchschnitt DE mit der Grundfläche des Kegels senkrecht ist auf der Grundlinie BC des Dreyecks ABC, und 2) ihr Durchschnitt FG mit der 1sten durch die Axe gehenden Ebene ABC parallel ist mit einer der Seitenlinien AC des Dreyecks ABC. so ist die Durchschnittslinie DT dieser 2ten Ebene mit der Kegeloberfläche eine Parabel, von welcher FG ein Durchmesser ist.

Denn man nehme in dem Schnitt DFE irgend einen Punkt H, und ziehe durch H an FG die Linie HK parallel mit DE, durch K aber eine Linie LM parallel mit BC; so ist (15, XI E.) die Ebene durch HK, LM parallel der Ebene durch DE, BC d. h. der Grundfläche des Kegels, mithin ist (24. Satz) der Durchschnitt der Ebene durch HK, LM mit der Kegeloberfläche ein Kreis, dessen Durchmesser LM ist. Es ist aber (10, XI. E.) HK senkrecht auf LM, weil DE auf BC senkrecht ist, mithin ist Rchtk $LK \times KM = HK^2$ (35, III.), und eben so ist Rchtk $BG \times GC = DG^2$. Folglich ist $DG^2 : HK^2 = BG \times GC : LK \times KM$, oder, weil GC, KM gleich sind, $= BG : LK = GF : FK$. Man beschreibe (20. Satz) eine Parabel, in welcher GF ein Durchmesser, F sein Scheitel, und DG eine diesem Durchmesser zugehörige Ordinate seye. Weil nun der Punkt D nach der Verzeichnung in dieser Parabel liegt; so liegt auch der Punkt H darinn (14. Satz, 2. Zus.). Und eben so wird bewiesen, daß alle Punkte der Linie DFE darinn liegen.

1. Zus. In der Ebene des Schnitts ABC seye durch den Scheitel des Durchmessers FG die Linie FN parallel mit der Grundlinie BC gezogen. Weil nun $BG : \left\{ \begin{matrix} FN \\ GC \end{matrix} \right\} = FG : AN$, und folglich

$\left.\begin{matrix} BG \times GC \\ DG^2 \end{matrix}\right\} : FN^2 = FG : AN$; so ist mithin $DG^2 = \frac{FN^2}{AN} . FG$. folglich der Parameter des Durchmessers $FG = \frac{FN^2}{AN}$ (14. Satz), oder, weil die Axe AO des Kegels die Linie FN in P in 2 gleiche Theile theilt; so ist dieser Parameter $= \frac{4PN^2}{AN}$. Man mache den Winkel $NPQ = NAP$. Weil nun $AN : PN = PN : NQ$; so ist mithin der genannte Parameter $= 4NQ$. Wäre der Winkel BAC $= ABC$; so würde $FN = AN =$ dem Parameter des Durchmessers FG.

2. Zus. Wenn der Kegel geradstehend ist, oder, wenn in einem schiefstehenden Kegel die durch die Axe gehende Ebene ABC senkrecht auf der Grundfläche steht; so ist die Linie DGE, die (nach der Verzeichn.) senkrecht ist auf BC der Durchschnittslinie der Grundfläche und der Ebene ABC, auch senkrecht auf der Ebene ABC (4 Erkl. XI. El.), mithin auf der geraden Linie FG. Daher ist auch jede andere Ordinate HK der Parabel DFE senkrecht auf dem Durchmesser FG, mithin ist FG die Axe (Satz 12. und 7. Satz, 7. Zus.). Der Parameter der Axe wird bestimmt, wie nach dem vorigen Zus. der Parameter eines Durchmessers überhaupt. In einem geradstehenden Kegel wird dann PQ senkrecht auf AN. Ist bey einem geradstehenden Kegel zugleich der Winkel BAC ein rechter; so ist der Parameter der Axe $= \frac{FN^2}{AN} = 2AN$.

Satz 28. Fig. 21.

Wenn man auf der Axe einer Parabel von ihrem Scheitel A aus eine Linie AE gleich dem Parameter der Axe nimmt, und über derselben als Durchmesser einen Kreis beschreibt; so fällt dieser Kreis, und noch vielmehr jeder Kreis, der über einem kleinern Stück der Axe AF als Durchmesser beschrieben wird, ganz innerhalb der Parabel, jeder Kreis hingegen, der über einem Stück der Axe AG, das größer ist, als AE, als Durchmesser beschrieben wird, schneidet die Parabel in 2 Punkten, und sein Bogen, der durch den Scheitel A geht, fällt ausserhalb der Parabel.

Man ziehe durch den Scheitel der Axe A eine Tangente an die Parabel, und nehme AH = AE, ziehe EH, und durch H eine Linie HI parallel mit der Axe AE. Zieht man dann ferner durch irgend einen Punkt P des Durchmessers AE eine Linie senkrecht auf die Axe, oder (7. Satz) parallel mit der Tangente, die dem Kreis in N, der Parabel in M, den Linien EH, HI in R, S begegne; so ist NP^2 = Rchtk AP × PE (35. III. E.) = AP × PR, weil PR = PE, wie aus der Verzeichnung folgt, nach welcher AH = AE: und MP^2 = PA × AE (13. Satz) = AP × PS. Folglich ist $NP^2 < MP^2$, mithin NP < MP, mithin liegen alle Punkte des Kreises N innerhalb der Parabel.

Da nun ferner jeder über einem noch kleinern Durchmesser AF beschriebene Kreis den über AE beschriebenen von innen berührt; so fällt der über AF beschriebene um so gewisser innerhalb der Parabel. Man nehme nun ferner AD = AG, und ziehe DG, die der Linie HI in K begegne, und ziehe durch K eine Linie KC senkrecht an die Axe, die dem Kreis in L begegne. Weil nun CG = CK, indem man AD = AG gemacht hat, und mithin LC^2 = AC × CG = AC × CK = AC × AH; so werden Punkte wie L zugleich in der Parabel seyn (14 Satz, 1. Zus.), mithin schneidet der über AG beschriebene Kreis die Parabel in denselben.

Zieht man dann ferner durch irgend einen Punkt p der Axe zwischen A und C eine Parallele mit AD, die der Parabel in m, dem Kreis über AG in n, den Linien HI, DG in s, r begegne; so ist np^2 = Ap × pG = Ap × pr, aber mp^2 = Ap × AH = Ap × ps, mithin $np^2 > mp^2$, folglich np > mp, mithin fallen die Punkte n des Bogens LAL ausserhalb der Parabel.

1. Zus. Man kann daher durch den Hauptscheitel der Parabel keinen Kreis beschreiben, der in diesem Punkte die Parabel berühre, und zwischen der Parabel und dem über dem Durchmesser AE beschriebenen Kreis hindurch gehe. Daher nennt man den Kreis über AE den Krümmungskreis (Circulus Osculator) der Parabel in ihrem Hauptscheitel (den Kreis, dessen Krümmung der Krümmung der Parabel in A unter allen möglichen Kreisen

am nächsten kommt). Man bedient sich dieses Kreises um die Krümmung der Parabel in A darnach zu schätzen, und nennt seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser (radius osculi.) Die Krümmungen verschiedener unendlich kleiner Kreisbogen verhalten sich nemlich umgekehrt, wie ihre Halbmesser.

2. Zus. Der Krümmungshalbmesser einer Parabel in ihrem Hauptscheitel ist gleich dem halben Hauptparameter.

Satz 29. Fig. 22. 23. 24.

Wenn durch den Scheitel D irgend eines Durchmessers DP der Parabel, der nicht ihre Axe ist, eine Berührungslinie DT gezogen wird, und wenn man durch eben diesen Punkt einen Kreis beschreibt, der die Linie DT in D berührt; so wird dieser Kreis, wenn er 1) von dem Durchmesser DP ein Stück DE, das dem Parameter dieses Durchmessers gleich ist, abschneidet — und diß sezt man voraus seye der Fall Fig. 22. — der Parabel nur noch in einem einzigen andern Punkt L begegnen, und die beyde Stücke des Kreises zwischen D und L werden das eine ganz ausserhalb, das andere ganz innerhalb der Parabel fallen. Schneidet hingegen 2) Fig. 23. der die Linie DT in D berührende Kreis von dem Durchmesser DP ein Stück DG ab, das größer ist, als der Parameter desselben, so fällt der Kreis von beyden Seiten von D ausserhalb der Parabel; hingegen von beyden Seiten von D innerhalb der Parabel, wenn er Fig. 24. ein Stück DG abschneidet, das kleiner ist als der Parameter des Durchmessers.

1.) Weil (Fig. 22.) der über DB beschriebene Keis die Linie DF in D berührt; so ist DB senkrecht auf DT, mithin ist jede Sehne der Parabel, die auf DB senkrecht ist, parallel mit der Tangente DT, folglich eine Ordinate des Durchmessers DP (12ter Saz und 5te Erklär.) Nun fälle man aus E auf den Durchmesser DB das Perpendikel EK, das verlängert dem Kreis wieder in J begegne, ziehe durch den Punkt J eine Parallele JT mit DP; so wird JT den Kreis entweder berühren oder schneiden. Von dem 1sten Fall s. Bemerk. 1. Schneidet sie ihn aber, so geschehe diß in L, und JT begegne der Linie DT in T; so wird

a) der Punkt L zugleich auf der Parabel liegen. Denn man ziehe durch L eine Linie LP parallel mit DT; so ist $DT = LP$, $JT = DE$, $DP = LT$. Nun ist $DT^2 = JT \times TL$ (36, III.) folglich $PL^2 = DE \times DP$, mithin L in der Parabel (14. Satz 1. Zus.)

Entweder liegt nun α) der Punkt L auf der Verlängerung der Linee TJ, mithin auch der Punkt P auf der Verlängerung der Linie DE, oder es liegt β) L zwischen T und J, mithin auch P zwischen D und E. In dem Fall α folgt nun

b) daraus, daß DE, JL, Durchmesser der Parabel sind, von selbst, daß die Punkte des Kreises, welche zwischen E und L liegen, innerhalb, die Punkte hingegen, welche zwischen L und J liegen, ausserhalb der Parabel fallen (Satz 4.). Man ziehe in diesem Fall nun

c) durch irgend einen Punkt Q der Linie DE eine Parallele mit DT, EJ, oder, was einerley ist, ein Perpendikel an DB, das der Parabel in N und W, dem Kreise in X und Y, dem Durchmesser DB in S, der Linie DL in Z, und der Linie DJ in V begegne, und es wird, da DL ganz innerhalb des Kreises liegt, $QZ < QY$ seyn. Weil nun, wenn LP dem Kreise wieder in h und dem Durchmesser in H begegnet, $EP \times PD = LP \times Ph$ (36, III. El. Schol.) und $ED \times DP = LP^2$ (14. Satz); so ist $DP^2 = EP \times PD + ED \times PD = LP \times (LP + Ph) = 2LP \times PH$, mithin $DP : LP = 2PH : DP = 2QS : DQ$, oder $DQ : QZ = 2QS : DQ$, folglich $DQ^2 = 2QS \times QZ$. Nun ist $DQ \times QE = XQ \times QY$ (35, III. El.) oder (weil $SX = SY$, und $EK = KJ$, folglich auch $SQ = SV$, mithin $XQ = VY$, folglich $QY = XQ + 2QS$, oder $XQ = QY - 2QS$) $DQ \times QE = XQ \times (XQ + 2QS) = QY \times (QY - 2QS)$ mithin $DQ^2 + DQ \times QE$ oder $DQ \times DE$ d. i. $QN = XQ^2 + 2SQ \times XZ$, folglich $QN > XQ$, und $QW^2 = YQ^2 - 2SQ \times ZY$, mithin $QW < QY$, mithin fallen alle Punkte des Bogens DYJ, oder (s. oben b) alle Punkte des Bogens DYL ausserhalb, hingegen alle Punkte des Bogens DXE, oder (s. oben b) alle Punkte des Bogens DXL innerhalb der Parabel.

In dem Falle β, wenn nemlich L zwischen J und T, folglich

auch P zwischen E und D liegt, wird ganz auf ähnliche Art, wenn man nemlich den Punkt Q zwischen D und P annimmt, bewiesen, daß der Bogen DYL außerhalb, der Bogen DXh hingegen innerhalb der Parabel liege. Nimmt man nun auf ähnliche Weise einen Punkt q zwischen P und E an, so wird eben so bewiesen, daß die beyden Bogen LJ, und hE innerhalb der Parabel liegen. Folglich liegt, da wie bey b gezeigt wird, daß auch jeder zwischen den Durchmessern LJ, DE unterhalb J und L liegende Punkt innerhalb der Parabel seye, der ganze Bogen DEJL innerhalb, der Bogen DYL aber außerhalb der Parabel.

Es schneide nun 2) Figg. 23. 24. a. der über DB als Durchmesser beschriebene Kreis von dem Durchmesser der Parabel ein Stück DG ab, das größer oder kleiner seye, als sein Parameter DE. Man fälle nun wieder aus E auf den Durchmesser DB ein Perpendikel EK, das verlängert dem Kreis wieder in J begegne, (von dem Fall, wenn es den Kreis berührt, oder ihm gar nicht begegnet s. Bem. 2.), durch J ziehe man eine mit DG gleichlauffende Linie JT; so wird JT den Kreis berühren oder schneiden. Vom 1sten Fall s. Bem. 1. Schneidet sie ihn aber, so geschehe diß in L, und JT begegne der Linie DT in T, und man ziehe noch durch L eine Linie LP parallel mit DT, die dem Durchmesser DG in P und DB in H begegne; so wird

a. wie bey nr. 1. a) bewiesen, daß auch L auf der Parabel liege.

Nun mache man b) GF = DE, ziehe die Linie LF, die, wenn es nöthig ist, verlängert dem Kreis wieder in M begegne. (Von dem Fall, wenn sie ihn berührt, was nur möglich ist, wenn DG < DE ist, s. Bem. 3.) Durch M ziehe man eine Linie senkrecht auf den Durchmesser des Kreises DB, oder parallel mit DT, LP, die dem Kreis wieder in O, und den Durchmessern des Kreises und der Parabel DB, DP in V, R begegne. Weil nun $GP \times PD = LP \times Ph$ (36. III. El. Schol. oder 35. III. El.), und $ED \times PD = LP^2$ (14. Satz); so ist $(GP + ED) \times DP = LP \times (Ph + LP) = LP \times (2LP \pm 2LH) = 2LP \times PH$, wo $GP + ED = GP + GF = PF$ ist, und eben so, wenn P zwischen

G, F liegt, ED — GP = GF — GP = PF, und PF × DP = 2LP × PH, mithin ist PF : LP = 2PH : DP = 2RV : DR. Aber es ist auch PF : LP = RF : MR = $\begin{Bmatrix} GR - DE \\ DE - GR \end{Bmatrix}$: MR, mithin ist $\begin{Bmatrix} GR - DE \\ DE - GR \end{Bmatrix}$: MR = 2RV : DR, oder GR × DR — DE × DR = ± 2MR × RV; oder GR × DR = ± 2MR × RV + DE × DR. Aber es ist auch GR × DR = MR × RO (35, III. Erkl.) = MR × (MR ± 2RV) = MR^2 ± 2MR × RV: folglich ist MR^2 = DE × DR, mithin liegt der Punkt M auch in der Parabel (14ter Satz, 1. Zus.) Man ziehe nun

c) aus irgend einem Punkt Q der Linie DR eine Linie parallel mit der Tangente DT, d. h. senkrecht auf die Axe DB, und diese Linie begegne der Parabel in N und W, dem Kreis in X und Y, der, wenn es nöthig ist, verlängerten Linie LM in Z, und es seye in dem Fall Fig. 23. QX < QU, in dem Fall Fig. 24. hingegen QX > QY; so hat man, wie so eben bey b. PF : LP = 2PH : DP. Nun ist PF : LP = FQ : ZQ = $\begin{Bmatrix} GQ - DE \\ DE - GQ \end{Bmatrix}$: ZQ, und 2PH : DP = 2SQ : DQ, folglich ist GQ × DQ — DE × DQ = ± 2ZQ × SQ, oder GQ × DQ = ± 2ZQ × SQ + DE × DQ. Nun ist aber auch GQ × DQ = XQ × QY (35, III. El.) = XQ × (XQ ± 2QS) = XQ^2 ± 2XQ × QS. Folglich ist XQ^2 ± 2XQ × QS = DE × DQ ± 2ZQ × SQ. Es ist aber 2XQ × QS < 2ZQ × QS, weil XQ < ZQ, folglich, wenn DG > DE, auch XQ^2 > DE × DQ d. h. (14. Satz) XQ^2 > NQ^2, oder XQ > NQ: hingegen, wenn DG < DE ist, so ist folglich XQ^2 < DE × DQ d. i. XQ^2 < NQ^2, oder XQ < NQ. Weil ausserdem im ersten Fall QY > XQ, und WQ = NQ; so ist auch QY > WQ. Mithin liegt in diesem Fall sowohl der Punkt X als Y, folglich der ganze Kreisbogen MDO ausserhalb der Parabel. Im 2ten Fall hingegen, da QY < XQ, und WQ = NQ ist, ist auch QY < WQ, folglich der ganze Kreisbogen MDO innerhalb der Parabel.

Bemerk. 1.) Wenn die durch J parallel mit DP gezogene Li-

nie den Kreis berührt; so wird auf ähnliche Art, wie oben für den Punkt L bewiesen, daß J selbst in der Parabel liege.

Bem. 2. Wenn in dem Fall, da DG < DE ist, die aus E senkrecht auf den Durchmesser des Kreises gezogene Linie den Kreis berührt (Fig. 24. b.); so liegt der Kreis ganz innerhalb der Parabel. Es fallen nemlich alsdann die Punkte J, B, K zusammen, und, wenn man die Verzeichnung macht, wie vorhin; so läßt sich nun leicht zeigen, daß auch die Linie LF den Kreis in L berühren, mithin die Punkte L, M zusammenfallen werden. Denn weil LJ parallel ist mit DG, so ist Winkel DJL = GDJ (29, I, E.) mithin der Bogen DL = dem Bogen GJ (26, III. E.), folglich, da DGJ ein Halbkreis ist, ist auch LDG ein Halbkreis, mithin LG ein Durchmesser des Kreises, und daher LG = DJ. Da nun ausserdem in den beyden Dreyecken EDJ, FGL, auch ED = FG, und Winkel EDJ = FGL (27, III. E.) so ist auch EJD = GLF (4, I. E.) mithin GLF ein rechter Winkel, folglich berührt FL den Kreis. Aber FL berührt in L auch die Parabel. Denn, weil die Winkel am Mittelpunkt LCJ, DCG gleich sind (15, I. E.) so ist LJ = DG (26 und 29, III. E.). Da nun JT = DE = FG; so ist folglich TL = DF. Aber auch, wenn man LP parallel mit DT zieht, TL = DP, folglich DP = DF, mithin LF eine Berührungslinie der Parabel (15ter Satz, 1. Zus.) Für alle Punkte des Bogens DGJ läßt sich nun leicht zeigen, daß sie innerhalb der Parabel fallen. Denn, wenn man durch irgend einen Punkt Q der Linie DE eine Linie parallel mit der Tangente DT, folglich senkrecht auf den Durchmesser DJ zieht, die dem Durchmesser in X, dem Kreise nach der Seite von DE hin in Y, der Parabel in W begegnet; so ist $SY^2 = SD \times SJ$ (35, III. E.) und $QW^2 = QD \times DE$ (14. Satz.) Aber QD > SD, und QE > SJ, folglich um so mehr DE > SJ, mithin ist $QD \times DE > SD \times SJ$, oder $QW^2 > SY^2$ folglich QW > SY, mithin um so mehr QW > QY. Auf dieselbe Art wird nun, wenn man durch einen Punkt der Linie LJ eine Linie parallel mit der Tangente FL zieht, beweisen, daß jeder Punkt y des Bogens

LyJ innerhalb der Parabel liege. Endlich von den Punkten des Bogens DXL wird der Beweis eben so geführt, wie in dem Beweis unsers Satzes bey c. Ist daher der Kreis noch kleiner, als der über DJ beschriebene, so daß mithin das aus E auf DJ gefällte Perpendikel ihn gar nicht mehr trift; so muß er um so vielmehr ganz innerhalb der Parabel liegen.

Bem. 3. Umgekehrt, wenn man von E an DJ ein Perpendikel EJ, alsdann JL parallel mit DE zieht, GF = DE macht, und nun die Linie LF den Kreis berührt; so berührt ihn auch EJ, oder DJ ist der Durchmesser des Kreises. Denn es wird, wie bey Bem. 2. gezeigt, daß der Bogen DL = GJ seye, daher ist die Sehne DL = der Sehne GJ (29, III. E.) und, weil der Bogen DLJ = dem Bogen LJG; so ist der Winkel GDL = DGJ (27, III. E.) mithin auch der Nebenwinkel des ersten, d. h. der Winkel FDL = dem Nebenwinkel des andern oder EGJ. Und da ausserdem GF = DE, mithin DF = GE; so sind die Dreyecke DFL, GEJ gleich, und namentlich FL = EJ. Da nun FL den Kreis berührt; so ist $GF \times FD = FL^2$ (36, III. E.) folglich auch $EJ^2 = GF \times FD = DE \times EG$, mithin berührt auch EJ den Kreis (37, III. E.)

1. Zus. Weil unter den Kreisen, die auf beyden Seiten des Scheitels des Durchmessers innerhalb der Parabel fallen, diejenigen, die grösser sind, sich der Parabel und zugleich dem Kreis mehr nähern, der von dem Durchmesser ein Stück, das dem Parameter desselben gleich ist, abschneidet; und weil dagegen unter den Kreisen, die auf beyden Seiten des Scheitels D ausserhalb der Parabel fallen, diejenigen, die kleiner sind, sich der Parabel und zugleich dem ebenbenannten Kreis mehr nähern; so folgt daraus, daß der Kreis, der auf der einen Seite von D ausserhalb, auf der andern innerhalb der Parabel fällt, sich der Parabel mehr nähert, als jeder andere, der in D die Parabel berührt, daß also dieser der Krümmungskreis der Parabel in D ist, und daß man nach ihm die Krümmung der Parabel in D schätzen muß.

2. Zus. Kein Bogen des Krümmungskreises, man nehme ihn so klein man will, fällt mit der Parabel zusammen, aber er macht mit ihr einen kleinern Winkel, als jeder andere Kreisbogen, der die Tangente der Parabel in dem nemlichen Punkt berührt.

3. Zus. Wenn man Fig. 22. aus einem Punkt D einer Parabel ein Perp ndikel DO auf die Axe AR fällt, und diß verlängert, biß es der Parabel wied.r in M begegnet; so haben die Punkte D, M, weil sie eine gemeinschaftliche Abscisse haben, auch eine gemeinschaftliche Subtangente OR (7. Satz, 8. Zus.) d. h. RM berührt die Parabel in M, und macht den Winkel MRD = 2ARD = 2EDt. Nun ist auch der Winkel LDt = 2.EDt, weil der Bogen EL = DJ (welches auf ähnliche Art bewiesen wird, wie bey Bemerk. 2. von dem Bogen GL, DJ) d. i. = dem Bogen DE. Folglich ist DL parallel mit MR, mithin eine dem Durchmesser MU zugehörige Ordinate (12. Satz.) Weil man nun aus einem gegebenen Punkt D einer Parabel an einen gegebenen Durchmesser MU nicht mehr als eine Ordinate ziehen kann, so folgt umgekehrt, daß, wenn man von einem gegebenen Punkt D einer Parabel ein Perpendikel DO an ihre Axe zieht, und diß verlängert, bis es der Parabel wieder in M begegnet, alsdann durch diesen Punkt M einen Durchmesser der Parabel MU, und durch D an diesen Durchmesser eine Ordinate zieht, welche der Parabel wieder in L begegnet, daß, sage ich, der Punkt L in dem Umfang des Krümmungskreises der Parabel für den Punkt D liege.

4. Zus. Der Krümmungshalbmesser CD einer Parabel (Fig. 22.) in irgend einem Punkt D, oder der Halbmesser ihres Krümmungskreises in diesem Punkt ist die 4te stetige Proportionallinie zu dem halben Hauptparameter der Parabel, und zu der Normallinie DG des besagten Punkts: oder der Krümmungshalbmesser verhält sich zu dieser Normallinie, wie das Quadrat dieser Normallinie zu dem Quadrat des halben Hauptparameters. Denn, wenn F der Brennpunkt ist, so ist der Parameter des Durchmessers DE = 4(AO+AF) (6te Erkl. und 1. Satz. 1. Zus.) = 2(RO+GO)

(7. Satz, 8. und 10. Zus.) = 2GR. Mithin ist, wenn man aus C an DE das Perpendikel Cm zieht, Dm = $\frac{1}{2}$ DE = GR. Nun ist, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CmD, DOG

$$CD : DG = \left.\begin{matrix}Dm\\GR\end{matrix}\right\} : GO$$, aber $GR : GO = GD^2 : GO^2$, weil GR : GD = GD : GO (8. VI. E.), mithin $CD : DG = DG^2 : GO^2$, wo GO der halbe Hauptparameter ist (7. Satz, 10. Zus.), oder GO : DG = DG : GR = GR : CD.

5. Zus. Die Krümmungshalbmesser verschiedener Punkte einer Parabel stehen unter einander in dem triplicirten Verhältniß, oder in dem Verhältniß der Würfel der Normallinien dieser Punkte.

Satz. 30. Fig. A.

(Archimeds 18ter Satz von der Quadratur der Parabel.)

Es seye ABC ein Stück einer Parabel, BD einer ihrer Durchmesser, B sein Scheitel und ADC eine Ordinate dieses Durchmessers; so ist das aus B auf AC gefällte Perpendikel Bb das gröste, das aus einem Punkt dieses Parabelstücks auf ADC gefällt werden kann.

Denn man ziehe durch B eine Linie parallel mit ADC; so ist diese eine Berührungslinie der Parabel in B (12. Satz, 5. Zus.), folglich Bb das gröste Perpendikel.

Satz. 31. Fig. A. (Archim. 19. S.)

Wenn man in einer Parabel ABC, in der BD ein Durchmesser, ADC eine Ordinate dieses Durchmessers ist, die halbe Ordinate AD in E nochmals halbirt, und parallel mit BD die Linie EF zieht, die der Parabel in F begegnet; so ist BD = $\frac{4}{3}$. EF.

Man ziehe FH parallel mit AC; so ist FH eine halbe Ordinate des Durchmessers BD (12. Satz, 3. Zus.). Es ist aber, in dem Parallelogramm EFDH, FH = ED = $\frac{1}{2}$ AD, oder AD = 2FH, und FE = HD. Nun ist $BH : BD = FH^2 : AD^2$ (13 Satz, 2. Zus.) folglich BH : BD = 1 : 4, mithin $\left.\begin{matrix}BD - BH\\FE\end{matrix}\right\} : BD$ = 3 : 4.

Satz 32. Fig. A. (Archim. 20. Satz.)

Wenn innerhalb eines Stücks ABC einer Parabel eine Dreyeck ABC über der diß Stück begränzenden Linie AC beschrieben wird, dessen Scheitel mit dem Scheitel B des Durchmessers BD zusammenfällt, dem diese Linie als Ordinate zugehört; so ist diß Dreyeck grösser, als die Hälfte des Parabelstücks.

Man ziehe durch B eine Linie KBJ parallel mit AC; so berührt diese die Parabel in B (12 Satz, 5 Zus.), und durch A, C Linien AK, CJ parallel mit BD, die der Linie KBJ in K, J begegnen; so fallen diese, als Durchmesser, oberhalb A, C ganz ausserhalb der Parabel (4. Satz) mithin fällt die Parabel ganz innerhalb des Parallelogramms ACJK, und ist mithin kleiner als diß Parallelogramm. Nun ist das Dreyeck ABC gleich der Hälfte dieses Parallelogramms, folglich grösser, als die Hälfte des Parabelstücks.

Zus. Hieraus folgt, daß man innerhalb eines solchen Parabelstücks ein Vieleck beschreiben kann, so, daß der Ueberschuß des Parabelstücks über dasselbe kleiner ist, als jede gegebene Fläche. Denn da das auf die angezeigte Art beschriebene Dreyeck mehr als die Hälfte der Parabel hinwegnimmt, und diß eben so der Fall ist, wenn man in den übrig bleibenden Parabelstücken wieder auf dieselbe Art Dreyecke beschreibt; so kommt man endlich auf übrig bleibende Theile, die kleiner sind, als jede gegebene Fläche (1, X. El.)

Satz 33. Fig. A. (Archim. 21. S.)

Wenn in einem Parabelstück ABC ein Dreyeck ABC auf die vorhin beschriebene Art, und in den übrig gebliebenen Stücken der Parabel auf dieselbe Art wieder Dreyecke AFB, BGC beschrieben werden; so ist das Dreyeck ABC = 8mal dem Dreyeck AFB oder BGC.

Der Durchmesser DB halbirt seine Ordinate AC (5. Erkl.). Wenn man nun eben so AB, BC in L, M halbirt, und die Durchmesser FLE, GMN zieht; so halbiren diese, weil sie parallel sind mit BD (4. Erkl.) auch AD, DC in E, N (2, VI und

16, V. E.) Man ziehe nun BE; so ist Δ AFB = 2. Δ FLB, und eben so ΔABE = 2. Δ LEB. Mithin ist
Δ AFB : Δ ABE = Δ FLB : Δ LEB = FL : LE.
Aber FE : BD = 3 : 4 (31. Satz)
und BD : LE = 2 : 1 (4, VI. El.)

folglich FE : LE = 3 : 2, und FL : LE = 1 : 2, mithin auch
Δ AFB : Δ ABE = 1 : 2. Aber
Δ ABE : Δ ABC = 1 : 4

folglich Δ AFB : Δ ABC = 1 : 8.

Eben so wird man nun mit dem Beweis fortfahren können, wenn in die Stücke AF, FB u. s. w. wieder auf dieselbe Art Dreyecke beschrieben werden.

Satz 34. Fig. A. (Archim. 22. S.)

Wenn ein Parabelstück ABC, und andere Flächen so viel man will, f, g, h, i u. s. w. gegeben sind; so daß jede vorhergehende f gleich ist 4mal der darauf folgenden g u. s. w. und, wenn f gleich ist dem auf vorhin angezeigte Art in dem Parabelstück beschriebenen Dreyeck ABC; so ist die Summe aller dieser Flächen f + g + h + i .... kleiner als das Parabelstück.

Man beschreibe auf die angezeigte Art in die übrig bleibende Stücke der Parabel die Dreyecke AFB, CGB, und fahre so weiter fort; so ist Δ ABC d. i. f = 4. (AFB + CGB) = 4g, mithin AFB + CGB = g. Eben so wird man beweisen, daß die 4 in die Stücke AF, FB, BG, GC beschriebene Dreyecke = h seyen, u. s. w. Mithin sind alle Dreyecke, die man auf diese Art in die Parabel beschreiben kann, = f + g + h + i u. s. w. Nun sind jene Dreyecke gewiß kleiner als das Parabelstück, mithin sind es auch die Flächen f + g + h + i u. s. w.

Satz 35. (Archim. 23. S.)

Wenn mehrere Grössen A, B, C, D, E u. s. w. in einem zusammenhängenden geometrischen Verhältniß stehen; so daß jede Vorhergehende 4mal so groß ist, als die zunächst darauf folgende;

so verhält sich die Summe aller dieser Grössen, nebst dem dritten Theil der Kleinsten, zu der Grösten A, wie 4 zu 3.

Es seyen die Grössen $A+B+C+D+E\ldots+N$. Man setze zu ihnen hinzu: $\frac{B}{3}+\frac{C}{3}+\frac{D}{3}+\frac{E}{3}\ldots+\frac{N}{3}$, oder $\frac{1}{3}(B+C+D\ldots+N)$; so erhält man $A+\frac{4B}{3}+\frac{4C}{3}+\frac{4D}{3}\ldots\frac{4N}{3}$ $= A+B+C+D\ldots+N+\frac{1}{3}(B+C+D\ldots+N)$ d. h. $A+\frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\ldots+\frac{M}{3} = A+B+C\ldots+N+\frac{1}{3}(B+C+D\ldots+N)$. Mithin $A+\frac{A}{3}$ oder $\frac{4A}{3} = A+B+C\ldots+N+\frac{1}{3}N$, oder $A+B+C\ldots+N+\frac{1}{3}N : A = 4:3$.

Satz 36. Fig. A. (Archim. 24. S.)

Ein jedes Parabelstück ABC verhält sich zu dem auf die oben beschriebene Art in dasselbe verzeichneten Dreyeck, wie 4 zu 3.

Man nehme eine Fläche O, die sich zu dem Dreyeck verhält, wie 4 zu 3; so ist das Parabelstück gleich dieser Fläche O. Denn ist das Parabelstück nicht gleich der Fläche O; so ist es grösser oder kleiner, als O. Es seye 1) wenns möglich ist $>$ O. Man beschreibe in die übrige Stücke AFB, BGC u. s. w. Dreyecke auf die oben angezeigte Art, bis die übrig bleibende Parabelstücke kleiner sind, als der Ueberschuß der Parabel über die Fläche O, so, daß mithin das eingeschriebene Vieleck grösser ist als die Fläche O. Nun nehme man Flächen A, B, C, D in zusammenhängendem geometrischen Verhältniß, so, daß jede Vorhergehende 4mal grösser ist, als die darauf folgende, so viele, als vielmal man die Einschreibung der Dreyecke wiederholt hat, und zwar seye die erste gleich dem Dreyeck ABC; so ist ihre Summe gleich dem ganzen eingeschriebenen Vieleck (34. Satz Bew.) Aber diese Summe ist noch kleiner als $\frac{4}{3}$tel des Dreyecks ABC (35. Satz) die Fläche O hingegen ist $\frac{4}{3}$tel dieses Dreyecks. Folglich ist das eingeschriebene Vieleck kleiner als O, und doch sollte es grösser seyn, als O. Mithin kann das Parabelstück ABC nicht grösser seyn, als O. Es seye nun, 2) wenns möglich ist $<$ O. Das übrige bleibe, wie oben,

und es seyen der Flächen A, B, C, D... so viele, bis die kleinste J kleiner seye, als der Ueberschuß der Fläche O über das Parabelstück. Weil nun $A+B+C\ldots+J+\frac{1}{3}J = \frac{4}{3}$tel des Dreyecks ABC sind (vorherg. Lehrs.), und auch $O = \frac{4}{3}$tel von ABC; so ist $A+B+C\ldots+J+\frac{1}{3}J = O$. Nun ist nach der Voraussetzung $\frac{1}{3}J$, oder $O-(A+B+C\ldots+J) < O -$ Parabelstück ABC, folglich muß $A+B+C\ldots+J >$ das Parabelstück ABC seyn gegen den 34. Satz. Mithin kann die Parabelfläche ABC auch nicht kleiner seyn als O, folglich ist sie $= O$, oder $= \frac{4}{3}$tel des Dreyecks ABC, oder $\frac{2}{3}$tel des Parallelogramms AKCJ.

(Zus. Parabelstücke, die gleiche Grundlinien, und Höhen haben, (Höhe immer wie im 30. Satz verstanden) sind dem Flächeninnhalt nach gleich. Umgekehrt, Parabelstücke, deren Flächeninnhalt gleich ist, haben bey gleichen Grundlinien auch gleiche Höhen — und bey gleichen Höhen auch gleiche Grundlinien. Parabelstücke, die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen; Parabelstücke von gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien. Sind bey 2 Parabelstücken weder Höhen noch Grundlinien gleich, so stehen sie im zusammengesetzten Verhältniß aus ihren Grundlinien und Höhen.)

Zwey-

Zweytes Buch.

Von der Ellipse.

Erklärungen.

1.) Wenn man in einer Ebene 2 Punkte D, E annimmt, und in denselbigen die Enden eines Fadens bevestigt, der länger ist als die Entfernung DE, den Faden dann mit einem Stift H anspannt, und so den Stift herumführt, bis er wieder nach H zurückkommt; so beschreibt der Stift eine in sich selbst zurückkehrende Linie, die man eine Ellipse nennt.

(Zus. Schon aus dieser Erklärung der Ellipse folgt, daß die Ellipse jede innerhalb des Umrings gezogene und gehörig verlängerte gerade Linie wenigstens in 2 Punkten schneidet.)

2.) Die Punkte D, E heissen die Brennpunkte,

3.) Der Punkt C aber, der die gerade Linie zwischen den Brennpunkten halbirt, der Mittelpunkt der Ellipse.

4.) Jede gerade Linie, die durch den Mittelpunkt geht, und zu beyden Seiten durch die Ellipse begränzt wird, heißt ein Durchmesser, und die Punkte, in denen sie der Ellipse begegnet, die Scheitel desselben.

5.) Der Durchmesser, der durch die Brennpunkte geht, heißt die grosse Axe.

6.) Der auf die große Axe senkrechte Durchmesser heißt die kleine Axe.

7.) Zwey Durchmesser, von denen jeder alle mit dem andern parallele, durch die Ellipse begränzte gerade Linien halbirt, heissen zugeordnete Durchmesser (diametri conjugatae).

8.) Jede gerade Linie, die zu beyden Seiten durch die Ellipse begränzt, und von einem Durchmesser halbirt wird, heißt eine diesem Durchmesse zugehörige Ordinate. (Die

beyden Stücke des Durchmessers, die sie abschneidet, heissen die dieser Ordinate zugehörige Abscissen.)

9.) Eine gerade Linie, welche die 3te Proportionallinie zu 2 zugeordneten Durchmessern ist, heißt der Parameter des ersten von ihnen.

(Zus. Aus dieser Erklärung folgt sogleich, daß das Rechteck zwischen zwey zugeordneten Durchmessern gleich seye dem Rechteck zwischen ihren Parametern. Denn es seyen zwey zugeordnete Durchmesser D, d, der Parameter des 1sten P, des 2ten p; so ist, weil nach der Erklär. $D : d = d : P$, auch $D : P = D^2 : d^2$ (20, VI. E.), und eben so, $D^2 : d^2 = p : d$, mithin auch $D : P = p : d$, folglich $D \times d = P \times p$).

10.) Eine gerade Linie, die einer Ellipse in einem einzigen Punkt begegnet, heißt eine Berührungslinie der Ellipse in diesem Punkt. *)

Satz 1. Fig. 1. (Simſ. 1. S.)

Zwey gerade Linien HD, HE, die man aus irgend einem Punkt H einer Ellipse an ihre beyde Brennpunkte D, E zieht, sind zusammengenommen gleich der großen Axe AB.

Denn, weil H ein Punkt der Ellipse ist, so ist HD + HE gleich der Länge des Fadens, mit welchem sie beschrieben worden ist; eben so, weil A und B in der Ellipse liegen, sind AD + AE sowohl, als BE + BD eben dieser Fadenlänge, mithin unter sich gleich. Man nehme von diesen Summen beyderseits ED hinweg; so ist 2. AD = 2. EB, mithin AD = EB. Man setze AE beiderseits hinzu, so ist AD + AE = AB = der großen Axe. Aber AD + AE ist gleich der Fadenlänge = HD + HE. Mithin ist HD + HE = der großen Axe AB.

1. Zus. (Simsons 1. Zus.) Die große Axe wird in dem Mittelpunkt C halbirt. Denn, weil DC = EC (3te Erkl.) und gezeigt worden ist, daß AD = EB; so ist AC = BC.

*) Noch einige weitere Erklärungen finden sich unten im 6ten Satz, ferner beym 11ten Satz, Bem. und 9. Zus. und nach dem 30sten Satz.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Wenn man aus einem Punkt ausserhalb der Ellipse zwey gerade Linien an die Brennpunkte zieht, so ist ihre Summe grösser, als die große Axe; zieht man aber aus einem Punkt innerhalb der Ellipse Linien an die Brennpunkte; so ist ihre Summe kleiner als die große Axe. Diß ist für Punkte in der Axe selbst und ihrer Verlängerung aus dem Beweise unsers Satzes klar, für andere Punkte folgt es aus 20, I. El. verbunden mit unserm Satz.

3. Zus. (Simsons 3. Zus.) Umgekehrt: wenn die Summe der aus einem Punkt an die Brennpunkte gezogenen geraden Linien gleich, oder grösser oder kleiner ist, als die große Axe; so liegt dieser Punkt in dem 1sten Fall auf der Ellipse, im 2ten ausserhalb, im 3ten innerhalb derselben.

4. Zus. Man kann geometrisch so viele Punkte einer Ellipse, als man will bestimmen, wenn die große Axe AB, und die Brennpunkte D, E gegeben sind. Man beschreibe nemlich aus dem Mittelpunkt D mit einem Halbmesser DH = einem beliebigen Stück der großen Axe einen Kreis, und aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EH = dem übrigen Stück der großen Axe einen andern Kreis; so werden sich diese Kreise sowohl oberhalb als unterhalb AB in Punkten H, h schneiden, und diese Punkte H, h liegen in der Ellipse. Etwas bequemer wird die Verzeichnung, wenn man auf der Verlängerung von AB die Linie BK = EB = AD macht, wodurch mithin DK = AB wird, und nun aus D mit einem beliebigen Halbmesser DJ, der kleiner als DB ist, und dann aus E mit dem Halbmesser EH = KJ Kreise beschreibt, die sich in H, h schneiden. Beschreibe man ferner aus E mit dem Halbmesser EL = DH einen Kreis, und einen andern aus D mit dem Halbmesser DL = EH; so geben die Durchschnittspunkte dieser Kreise L, l noch 2 andere Punkte in der Ellipse.

5. Zus. Fig. 2. Die Ellipse begegnet in 2 Punkten, aber nicht in mehreren, jeder durch einen ihrer Brennpunkte gezogenen geraden Linie.

Geht die gerade Linie durch beyde Brennpunkte, oder ist sie

die Axe selbst, so erhellt diß aus 3. Zus. Geht aber die gerade Linie nur durch einen der Brennpunkte D, wie DM, so verlängere man sie von beyden Seiten des Brennpunkts, bis DJ = DH = AB, und ziehe aus dem andern Brennpunkt E die geraden Linien EJ, EH. Weil nun $\left.\begin{matrix}DJ\\DH\end{matrix}\right\} = AB > DE$; so ist der Winkel DEJ > DJE, und DEH > DHE, und sowohl DJE als DHE sind spitzig. Man mache den Winkel MEJ = MJE, und NEH = NHE; so ist MJ = ME und NH = NE, mithin ist DM + ME = DJ = AB, und eben so DN + NE = DH = AB, folglich liegen die Punkte M, N in der Ellipse (3. Zus.) Zieht man aber an irgend einen andern Punkt S oder O der Linie DJ Linien ES, EO; so ist DS + ES oder DO + EO entweder grösser oder kleiner als DM + EM d. i. als AB, mithin liegen die Punkte S, O ausserhalb oder innerhalb der Ellipse, und diese hat keine andere Punkte, als M oder N mit der geraden Linie DJ gemein.

6. Zus. 1.) Wenn man Fig. 3. eine gerade Linie durch irgend 2 Punkte M, N einer Ellipse zieht; so liegt das Stück dieser geraden Linie, das zwischen M, N enthalten ist, innerhalb der Ellipse, die Verlängerung von MN hingegen ganz ausserhalb der Ellipse. 2) Umgekehrt: jede gerade Linie, die durch einen Punkt innerhalb der Ellipse gezogen ist, begegnet ihr in 2 Punkten, aber nicht in mehreren.

1.) Geht die gerade Linie durch einen Brennpunkt der Ellipse, so ist der Satz schon erwiesen (vor. Zus.) Geht hingegen irgend eine andere Linie VX durch 2 Punkte der Ellipse M, N, so fälle man auf sie aus einem der Brennpunkte D das Perpendikel DP, und verlängere es, bis PR = PD, ziehe dann aus dem andern Brennpunkt E die Linie ER, und ausserdem die Linien DM, EM, MR, DN, EN, NR; so ist DM = MR, DN = NR, und eben so, wenn man an einen Punkt O zwischen M und N DO, EO, OR, und auf der Verlängerung von MN, an einen Punkt S DS, ES, RS zieht, DO = OR, DS = SR; daher ist EM + DM = EM + MR; EN + DN = EN + NR; EO + DO = EO + OR; ES + DS

ES + SR. Weil nun M und N in der Ellipse liegen; so ist EM + DM = EN + DN, mithin EM + MR = EN + NR, folglich können die Linien EN, NR nicht auf einerley Seite der Linie ER mit EM, MR liegen (21, I. E.) d. h. die Linie ER muß innerhalb des Vierecks EMNR durchgehen. Wo mithin auch immer der Punkt O auf der Linie MN genommen ist, so liegt er entweder auf der Linie ER selbst, oder innerhalb des Dreyecks EMR, oder des Dreyecks ENR. In allen Fällen ist also EO + OR < EM + MR d. i. < EM + DM, mithin der Punkt O innerhalb der Ellipse, hingegen ES + RS > EM + MR d. i. > EM + DM (21, I. E.) folglich S ausserhalb der Ellipse (3. Zus.)

2.) Weil jede Linie, die man durch einen Punkt innerhalb der Ellipse zieht, ihr in 2 Punkten begegnet (1ste Erklär. Zus.) so fällt das Stück von ihr, das zwischen diesen Punkten liegt, innerhalb, ihr übriger Theil hingegen ausserhalb der Ellipse (nr. 1,) mithin begegnet sie der Ellipse in keinem andern Punkt.

7. Zus. Keine gerade Linie schneidet daher die Ellipse in mehr als 2, oder berührt sie in mehr als in einem Punkt.

8. Zus. (Simsons 4. Z.) Fig. 1. Die Entfernung des Scheitels F oder G der kleinen Axe von jedem der Brennpunkte D, E ist gleich der halben großen Axe. Denn man ziehe GD, GE. Weil nun CD = CE, CG gemeinschaftlich, und die Winkel bey C gleich sind, so sind die Dreyecke GDC, GEC gleich, mithin GD = GE. Aber GD + GE = der großen Axe, mithin GD = GE = der halben großen Axe. (Hieraus folgt, daß auch die Winkel GDE, GED gleich sind. Ferner läßt sich daraus leicht ableiten, wie man, wenn die beyden Axen einer Ellipse gegeben sind, ihre Brennpunkte finden, mithin die Ellipse beschreiben kann.)

9. Zus. (Simsons 5. Z.) Die kleine Axe FG theilt sich in dem Mittelpunkt C in 2 gleiche Theile. Denn man ziehe aus einem Brennpunkt D an ihre Scheitel die Linien DF, DG; so sind diese gleich (vorherg. Zus.) mithin sind die Winkel DFC, DGC gleich, und DCF, DCG sind rechte Winkel, folglich ist CF = CG (26, I. E.)

Satz 2. (Simſ. 2. S.) Fig. 1.

Das Quadrat der halben kleinen Axe CG iſt gleich dem Rechteck AE × EB zwiſchen den Stücken der großen Axe, die zwiſchen einem Brennpunkt und ihren Scheiteln liegen.

Denn $CG^2 + CE^2 = GE^2 = CB^2$ (1. Satz, 8. Zuſ.) $= AE \times EB + CE^2$ (5, II. E.), mithin $CG^2 = AE \times EB$.

Satz 3. (Simſ. 3. S.) Fig. 1.

Jeder Durchmeſſer MP theilt ſich in dem Mittelpunkt C in 2 gleiche Theile.

Denn, es ſeye CM nicht gleich CP, und man mache CQ = CM, und ziehe aus den Brennpunkten die Linien DM, EM, DP, EP, DQ, EQ. Weil nun CD = CE, und CQ = CM geſetzt wird, ſo ſind die Dreyecke MCE, QCD gleich, mithin DQ = EM. Eben ſo müßte auch EQ = DM ſeyn, mithin wäre DQ + EQ = EM + DM = DP + EP, was unmöglich iſt (21, I. E.) folglich iſt CM = CP.

1. Zuſ. Zwey Durchmeſſer einer Ellipſe MP, RT, die gegen ihre große, folglich auch gegen ihre kleine Axe gleich geneigt ſind, ſind gleich und umgekehrt. Wenn es möglich iſt, daß bey gleicher Neigung der Durchmeſſer MP, RT gegen die große Axe AB, oder mithin auch gegen die kleine Axe FG doch MP, RT ungleich ſeyn könnten, ſo ſeye z. B. MP > RT, folglich CP > CT. Man mache CQ = CT, mithin wäre DQ = ET wegen der gleichen Dreyecke DCQ, ECT, und EQ = DT, wegen der gleichen Dreyecke ECQ, DCT, folglich DQ + EQ = ET + DT = DP + EP, was unmöglich iſt.

2. Zuſ. 1) Die Entfernungen der Scheitel eines und eben deſſelben Durchmeſſers, und eben ſo zweyer gleich gegen einerley Axe geneigter Durchmeſſer von den Brennpunkten der Ellipſe ſind beziehungsweiſe gleich. Namentlich ſind die Entfernungen der Scheitelpunkte der kleinen Axe von jedem der Brennpunkte unter ſich gleich, nemlich gleich der halben großen Axe. 2) Jeder andere Punkt der Ellipſe hingegen iſt von den beyden Brennpunkten ungleich entfernt, nemlich näher bey dem Brennpunkt, der

mit ihm auf einerley Seite der kleinen Axe liegt, entfernter von dem andern. 3) Namentlich sind die Scheitel der großen Axe näher bey dem einen Brennpunkt und entfernter von dem andern, als jeder andere Punkt der Ellipse, oder der Unterschied der Entfernungen der beyden Brennpunkte von den Scheiteln der großen Axe ist größer, als der Unterschied ihrer Entfernungen von jedem andern Punkt der Ellipse. 4) Die Entfernungen irgend eines Punkts der Ellipse zwischen der großen und kleinen Axe von den Brennpunkten der Ellipse sind um so mehr von sich unter einander und von der halben großen Axe unterschieden, je näher der Punkt bey der großen, je entfernter er mithin von der kleinen Axe liegt.

1. a) Für die große Axe ist $AD = EB$ (Beweis des 1sten Satzes) folglich auch $AE = DB$.

b) Für die kleine Axe s. 1. Satz, 8. Zus.

c) Für jeden Durchmesser MP ist, wegen der gleichen Dreyecke DCM, ECP, $DM = EP$, und eben so wegen der gleichen Dreyecke ECM, DCP, $EM = DP$.

d) Für 2. gegen die große Axe AB, mithin auch gegen die kleine FG gleich geneigte Durchmesser MP, RT ist, wegen der Gleichheit der Dreyecke DCM, ECP, ECR, DCT, $DM = EP = ER = DT$, und wegen der Gleichheit der Dreyecke ECM, DCP, DCR, ECT, $EM = DP = DR = ET$.

2. Ferner ist a) für die große Axe klar, daß $DB > EB$, und $EA > DA$.

b) für einen jeden andern Punkt M, der zwischen den Scheiteln F und B der Axen liegt, ist $DM > EM$, weil der Winkel $DEM > DEF$, aber $EDM < EDF$ d. i. $< DEF$ (1 Satz, 8. Zus.) mithin $DEM > EDM$ ist.

3. Man verlängere AB, bis $BK = EB$, folglich $DK = AB$, und DM, bis $MJ = ME$, folglich DJ ebenfalls $= AB$ ist, und ziehe KJ; so ist der Winkel $K = DJK$, mithin $> EJK$, mithin ist $EJ > EK$ oder $> 2. EB$. Nun ist $EM + MJ$, oder $2 EM > EJ$,

folglich noch vielmehr $2EM > 2EB$, oder $EM > EB$, und mithin $DM < DB$, folglich $DM - EM < DB - EB$.

4. Wenn U zwischen M und B liegt; so ist $DM < DU$. Denn wäre entweder

a) $DM = DU$; so wäre $DUM = DMU$, mithin wäre der Winkel EMU, der $>$ DUM ist, $>$ DMU, und um so mehr $>$ EMU, folglich $EM > EU$, mithin $DM + EM > DU + EU$, was unmöglich ist (1st. Satz).

Wäre b) $DM > DU$; so wäre $DUM > DMU$, mithin der Winkel EUM, der $>$ DUM ist, auch $>$ DMU, und um so mehr $>$ EMU, folglich wäre wieder $EM > EU$, mithin abermals $DM + EM > DU + EU$, was unmöglich ist. Es muß folglich $DM < DU$, mithin $EM > EU$ seyn, daher ist $DM - EM < DU - EU$.

Satz 4. (Simsons 4. S.) Fig. 1.

Wenn man aus einem Punkte H der Ellipse HY unter einem rechten Winkel an die große Axe AB, und eine gerade Linie HE an den näher liegenden Brennpunkt E zieht; so verhält sich die halbe große Axe CB, zu CE der Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt, wie CY die Entfernung des gefällten Perpendikels vom Mittelpunkt, zum Ueberschuß der halben großen Axe über die von H an den Brennpunkt gezogene Linie, oder zu $CB - HE$.

Man mache $BP = EH$, und ziehe HD an den andern Brennpunkt. Aus dem Mittelpunkt H mit dem Halbmesser HE beschreibe man einen Kreis, der, wenn HE nicht selbst senkrecht ist auf AB, der Axe wieder in O, und der geraden Linie DH in M, N begegne. Weil nun $DE = 2CE$, und $OE = 2YE$ (3, III. E.); so ist $DO = DE \mp EO = 2(CE \mp EY) = 2CY$. Und weil $DN = DH + HE = AB$ (1st. Satz); so ist $DN = 2CB$. Aber $MN = 2HE = 2BP$, mithin ist $DM = DN - MN = 2(CB - BP) = 2CP$. Wegen des Kreises aber ist (Zus. zu 36, III. E.) $ND \times DM = ED \times DO$, folglich ist $\left.\begin{matrix}ND\\AB\end{matrix}\right\} : DE = DO : DM$, oder $BC : CE = CY : \left\{\begin{matrix}CP\\CB - HE.\end{matrix}\right.$

1. Zuſ. Iſt HE ſelbſt ſenkrecht auf AB; ſo iſt BC : CE = CE : CP = CE : CB — HE.

2. Zuſ. (Simſons 3.) Umgekehrt: Wenn auf einer der Lage und Gröſse nach gegebenen Linie AB, die in C halbirt iſt, ein anderer Punkt E zwiſchen B und C gegeben iſt, und aus einem Punkt H an AB ein Perpendikel HY, und die Linie HE gezogen, und eine dieſer letzten gleiche Linie BP von B gegen C hin getragen wird, und wenn dann CP : CY = CE : CB iſt, und P und Y auf einerley Seite des Punkts C liegen; ſo liegt der Punkt H auf einer der Lage nach gegebenen Ellipſe, nemlich auf der, die zur groſsen Axe AB, und zu einem Brennpunkt E hat.

Denn man nehme AD = BE, und beſchreibe nach der 1ſten Erklärung eine Ellipſe aus den Brennpunkten D, E und mit der groſsen Axe AB; ſo liegt H auf dieſer Ellipſe. Denn, wenn diſs nicht iſt, ſo begegne YH der Ellipſe in einem andern Punkt Q auf eben der Seite von AB, auf welcher H liegt, man ziehe EQ, und mache BR = EQ; ſo iſt nach unſerm Satz CR : CY = CE : CB. Aber nach der Vorausſetzung iſt auch CP : CY = CE : CB, mithin müſste CR : CY = CP : CY, folglich CR = CP, mithin BR = BP, oder EQ = EH ſeyn, was unmöglich iſt. Folglich kann die Ellipſe der Linie YH auf derſelben Seite von AB, auf welcher H liegt, in keinem von H verſchiedenen Punkt Q begegnen, mithin liegt H auf der Ellipſe.

Satz 5. (Simſons 5. S.) Fig. 1.

Wenn alles bleibt, wie bey dem vorigen Satz; ſo iſt das Quadrat des Perpendikels HY gleich dem Ueberſchuſs des Rechtecks AY × YB (aus den Stücken der Axe, zwiſchen dem Perpendikel und den Scheiteln der Axe) über das Rechteck DP × PE (aus den Stücken der Axe zwiſchen dem Punkt P und den Brennpunkten).

Denn, weil E der näher bey H liegende Brennpunkt iſt; ſo fällt (3ter Satz, 2. Zuſ.) P zwiſchen B und C, und weil BC in dem Punkt P nach Belieben geſchnitten iſt; ſo iſt (7. II. E.) $BC^2 + CP^2 = 2\,BC \times CP + BP^2$ oder (weil BC : CE = CY : CP)

$= 2EC \times CY + BP^2 = 2EC \times CY + HE^2 - 2EC \times CY + EY^2 + HY^2 =$ (7, II. E.) $EC^2 + CY^2 + HY^2$, und, wenn man beiderseits $CP^2 + CY^2$ abzieht; so ist $BC^2 - CY^2 = EC^2 - CP^2 + HY^2$ d. i. (5, II. E.) $AY \times BY = DP \times PE + HY^2$, mithin $HY^2 = AY \times BY - DP \times PE$.

Satz 6. Fig. 4.

Wenn man die große Axe einer Ellipse bis an einen Punkt K verlängert, so daß die Entfernung dieses Punkts vom Mittelpunkt der Ellipse C, oder die Linie CK die 3te geometrische Proportionallinie ist zu CD der halben Entfernung der beyden Brennpunkte von einander, und zu AC der halben kleinen Axe der Ellipse, und wenn man dann durch K ein Perpendikel LJ von unbestimmter Länge auf der großen Axe AB errichtet (diß pflegt man die Directrix der Ellipse zu nennen); so haben alle Punkte der Ellipse eine ungleiche Entfernung von diesem Perpendikel, und dem ihm zunächst gelegenen Brennpunkt D, nemlich sie liegen näher bey diesem, als bey der Directrix. Jedoch haben alle diese Entfernungen unter sich gleiches Verhältniß, nemlich die Entfernung eines jeden Punkts der Ellipse von der Directrix verhält sich zu seiner Entfernung von dem der Directrix zunächst gelegenen Brennpunkt, wie die große Axe der Ellipse zu dem Abstand ihrer Brennpunkte von einander.

Denn 1) in Ansehung der Scheitel A, B der großen Axe ist, weil $CK : CA = CA : CD$, auch $CK \mp CA : CA \mp CD = CA : CD$ d. h. $\left.\begin{matrix} AK \\ BK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right. = CA : CD = BA : DE$.

2) Für die Scheitel F, G der kleinen Axe ist, wenn man FJ senkrecht auf LJ zieht, weil $FJ = CK$, und $DF = CA$ (1. Satz, 8. Zus.) $FJ : DF = CK : CA = CA : CD = BA : DE$.

3) Für Punkte N, n der Ellipse, die in den aus den Brennpunkten errichteten Perpendikeln liegen, ist (4ter Satz, 1. Zus.) $CA : CD = CD : CA - DN$, da nun auch nach der Verzeichn. $CA : CD = CK : CA$; so ist $CK : CA = CD : CA - DN$, folglich auch $CK - CD : CA - CA + DN = CK : CA = CA : CD$

d. i. wenn man NR senkrecht auf LJ zieht, NR : DN = CA : CD = AB : DE. Und auf ähnliche Art erhält man nR : Dn = CA : CD = AB : DE.

4) Für irgend einen andern Punkt H der Ellipse ist, wenn man von H das Perpendikel HP auf die Axe fällt (4t. Satz) CA : CD = CP : CA — DH. Aber nach der Voraussetzung ist CA : CD = CK : CA, mithin CK : CA = CP : CA — DH, folglich CK — CP : CA — CA + DH = CK : CA d. i. wenn man HQ senkrecht auf LJ zieht: HQ : DH = CK : CA = CA : CD = AB : DE. Da nun DE, der Abstand der Brennpunkte von einander, immer kleiner ist, als die Axe; so ist auch die Entfernung eines jeden Punkts H der Ellipse von dem der Directrix zunächst gelegenen Brennpunkt kleiner als seine Entfernung von der Directrix.

Satz 7. (Simsons 6. S.) Figg. 1. 4.

Wenn man aus einem Punkt H einer Ellipse eine Linie HY mit einer der beyden Axen parallel zieht, bis sie der andern Axe begegnet; so verhält sich das Quadrat der Axe, welcher die Linie HY begegnet, zu dem Quadrat der Axe, mit welcher sie parallel ist, wie das Rechteck zwischen den Stücken, die sie auf der ersten abschneidet, zu dem Quadrat der Linie HY selbst.

1) Es seye Fig. 1. HY mit der kleinen Axe FG parallel gezogen, man ziehe an die Brennpunkte die Linien HD, HE, und mache BP gleich der kleinern von diesen beyden Linien = HE. Weil nun (4ter Satz) BC : CE = CY : CP; so ist auch $BC^2 : CE^2 = CY^2 : CP^2$, mithin auch $BC^2 : CE^2 = BC^2 - CY^2 : CE^2 - CP^2 = AY \times YB : DP \times PE$, folglich $BC^2 : BC^2 - CE^2 = AY \times YB : AY \times YB - DP \times PE$ d. h. (5ter Satz) $BC^2 : CF^2 = AY \times YB : HY^2$.

2) Es seye Fig. 4. HY parallel mit der großen Axe gezogen. Weil nun nach Nr. 1. $BC^2 : CF^2 = AP \times PB : \begin{cases} HP^2 \\ CY^2 \end{cases}$ (indem man nemlich HP senkrecht auf die große Axe zieht); so ist umgekehrt

und 19, V. E. auch $CF^2 : BC^2 = CF^2 - CY^2 : BC^2 - AP \times PB$ $= FY \times YG : \begin{cases} CP^2 \\ HY^2. \end{cases}$

1. Zus. (Simsons 1. Z.) Daher verhalten sich die Quadrate der geraden Linien, die aus Punkten der Ellipse an eine der Axe parallel mit der andern gezogen werden, zu einander, wie die Rechtecke der Stücke, die auf der Axe zwischen ihren Scheiteln und den gezogenen Linien abgeschnitten werden. Denn es seyen Fig. 5. HM, PQ zwey dergleichen mit FG parallel gezogene Linien; so ist $AM \times MB : HM^2 = AB^2 : FG^2 = AQ \times QB : QP^2$, folglich $HM^2 : QP^2 = AM \times MB : AQ \times QB$.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Wenn man daher Fig. 5. über der einen Axe als Durchmesser einen Kreis beschreibt, dem die parallel mit der andern Axe gezogene Linien MH, PQ in den Punkten N, R begegnen; so verhalten sich die Stücke dieser Linien zwischen der Axe und dem Kreis, wie ihre Stücke zwischen der Axe und der Ellipse. Denn $AM \times MB$ ist $= MN^2$, und $AQ \times QB = QR^2$ (35, III. E.) daher ist $MN^2 : QR^2 = HM^2 : QP^2$, mithin $MN : QR = HM : QP$ (22, VI. E.)

(Eben so ist nun namentlich, wenn die Axe FG dem Kreis in J begegnet, $MN : CJ = MH : CF$, oder $MN : MH = CJ : CF = CA : CF$ d. h. die Stücke einer senkrecht auf einer Axe der Ellipse errichteten Linie zwischen der Axe und dem Kreis, und zwischen der Axe und der Ellipse verhalten sich zu einander, wie die Axe, auf welcher die Perpendikel stehen, zu der Axe, mit welcher sie parallel gezogen sind.)

3. Zus. Wenn man Fig. 6. aus einem Punkt einer Ellipse H an ihre kleine Axe eine gerade Linie HR gleich der halben großen Axe zieht; so ist das Stück HS dieser Linie, das zwischen den Punkt und die große Axe fällt, immer gleich der halben kleinen Axe, mithin das Stück SR, das zwischen die beyden Axen fällt, gleich dem halben Unterschied der beyden Axen und umgekehrt. Denn, wenn man HP senkrecht auf die kleine Axe zieht, und wenn

1) HR = CB; so ist

$$\left.\begin{matrix}CB^2\\HR^2\end{matrix}\right\} : CF^2 = HP^2 : FP \times PG$$

$$= HR^2 - HP^2 : CF^2 - FP \times PG$$

$$= PR^2 : CP^2$$

mithin $HR : CF = \left\{\begin{matrix}PR : CP\\HR : HS\end{matrix}\right.$

folglich ist CF = HS, mithin RS = CB — CF.

2) Umgekehrt, wenn HS = CF und HY senkrecht gezogen wird auf die große Axe AB; so ist

$$\left.\begin{matrix}CF^2\\HS^2\end{matrix}\right\} : CB^2 = HY^2 : AY \times YB$$

$$= HS^2 - HY^2 : CB^2 - AY \times YB$$

$$= SY^2 : \left\{\begin{matrix}CY^2\\HP^2\end{matrix}\right.$$

mithin $HS : CB = \left\{\begin{matrix}SY : HP\\HS : HR\end{matrix}\right.$

folglich ist CB = HR, und RS = CB — CF.

3) Wenn RS = CB — CF; so ist HS = CF. Denn, wäre HS größer oder kleiner als CF, und wäre dagegen z. B. SX = CF, und schnitte SX die kleine Axe in O, so wäre SO = CB — CF nr. 2. d. i. = RS, was unmöglich ist.

4. Zus. Von einem gegebenen Punkt H einer Ellipse kann man eine Linie HR = der halben großen Axe CB an die kleine ziehen, wenn man von H ein Perpendikel HP auf die kleine Axe fällt, das in N dem Kreise begegnet, den man über der kleinen Axe FG als Durchmesser beschreibt, alsdann aus dem Mittelpunkt die Linie CN, und parallel mit CN die Linie HR zieht, denn alsdann ist HS = CN = CF, mithin HR = CB (3. Zus. Nr. 2.)

5. Zus. Wenn man auf beyden Axen, zu beyden Seiten des Mittelpunkts die Linien CJ, CK, CL, CM, jede gleich dem halben Unterschied der Axen nimmt; so sind die Punkte J, K, L, M die Gränzen der Stellen, auf welche die von Punkten der Ellipse gezogene, den halben Axen gleiche, Linien treffen. Denn, wenn

man durch M irgend eine Linie MZ zieht; so ist MZ und noch vielmehr UZ > MC, d. h. > BC — CF, mithin kann (3. Zus.) weder MT noch UT = BC seyn.

Bemerk. Auf den vorhergehenden Zusätzen, besonders auf Zus. 3. nr. 3. beruht die Beschreibung einer Ellipse, deren beyde Axen gegeben sind, vermittelst der Bewegung einer geraden Linie um 2 bewegliche Mittelpunkte, deren Entfernung von einander beständig gleich ist dem halben Unterschied der Axen der Ellipse, und die beständig auf einer der Axen sich befinden.

Satz 8. (Simsons 7. S.)

Jede gerade Linie HL (Fig. 5.) deren beyde Endpunkte in einer Ellipse liegen, und die mit der einen Axe FG parallel ist, wird von der andern AB in M halbirt, oder, was einerley ist, die Axen sind zugeordnete Durchmesser, und solche mit der einen Axe FG parallele Linien HL sind mithin Ordinaten der andern Axe.

Denn HL begegne dem über AB beschriebenen Kreis in N, O; so ist 7. Satz 2. Zus. MN : MO = MH : ML. Aber MN = MO (3, III. E.) mithin auch MH = ML.

1. Zus. Umgekehrt, wenn von einer geraden Linie HL, die mit einer Axe parallel lauft, und von der andern halbirt wird, der eine Endpunkt H in der Ellipse liegt, so liegt auch der andere L darinn. Denn gesetzt HL begegne der Ellipse in einem andern Punkt Y; so wäre MN : MO = MH : MY, daher MY = MH = ML, welches unmöglich ist. Ueberhaupt begegnet also jede mit der einen Axe parallele Linie, die einen Punkt auf der Ellipse hat, derselben noch in einem Punkt.

2. Zus. Die Ordinate NS der großen Axe (Fig. 4.) die durch einen Brennpunkt D geht, ist die dritte Proportionallinie zu der großen und kleinen Axe, und mithin (9. Erkl.) ein Parameter der großen Axe. Denn da $BC^2 : CF^2 = AD \times DB : ND^2$ (7. Satz), aber $AD \times DB = CF^2$ (2. Satz); so ist BC : CF = CF : ND, mithin, da ND = DS, AC : FG = FG : NS.

3. Zus. Die Quadrate der jeder Axe zugehörigen halben Ordinaten verhalten sich zu den Rechtecken der korrespondirenden Abscissen dieser Axe, wie der Parameter dieser Axe zur Axe. Denn da (Fig. 1.) wenn HY senkrecht ist auf AB, $HY^2 : AY \times YB = CF^2 : BC^2$ (7. Satz), aber $CF^2 : BC^2$ = Parameter der großen Axe : AB; so ist $HY^2 : AY \times YB$ = Parameter der großen Axe : AB. Aber HY ist eine halbe Ordinate von AB (8. Satz.). Und eben so ists in Ansehung der an die kleine Axe gezogenen Ordinaten.

4. Zus. Die Quadrate der einer und ebenderselben Axe zugehörigen halben Ordinaten verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke der zugehörigen Abscissen. (Dieser Zus. ist einerley mit Satz 7. 1st. Zus. nur daß nach dem, was im 8ten Satz bewiesen worden, jetzt der Ausdruck: Ordinaten gebraucht werden darf.)

5. Zus. Jede Axe FG Fig. 5. ist die gröste der der andern Axe AB zugeordneten Ordinaten. Alle Ordinaten einer Axe AB die auf einerley Seite der 2ten ihr zugeordneten Axe fallen, sind ungleich, nemlich die näher bey der 2ten liegende größer, als die davon entferntere. Auf beyden Seiten der 2ten Axe sind die davon gleich weit entfernt liegende Ordinaten der ersten gleich. Und umgekehrt. Es seye FC die 2te halbe Axe, TV, HM halbe Ordinaten der 1sten Axe, und zwar jene näher bey FC als diese; so ist (4. Zus.) $FC^2 : TV^2 = AC \times BC : AV \times BV$. Aber $AC \times BC > AV \times BV$ (5, II. E.) mithin $FC^2 > TV_2$, folglich $FC > TV$, und daher auch $2FC > 2TV$. Ferner ist $TV^2 : HM^2 = AV \times BV : AM \times BM$. Aber $AV \times BV > AM \times BM$ (5, II. E.), mithin $TV_2 > HM^2$, folglich $TV > HM$, folglich auch $2TV > 2HM$. Endlich, wenn noch pq eine halbe Ordinate der 1sten Axe, und $Cq = CM$ ist; so ist $HM^2 : pq^2 = AM \times BM : Aq \times Bq$, aber $AM \times BM = Aq \times Bq$ (5, II. E.) folglich $HM_2 = pq^2$, mithin $HM = pq$, und $2HM = 2pq$. Und daher folgen, wie man leicht sieht, auch die umgekehrte Sätze. (Noch anders und zwar leichter hätte sich dieser Zusatz aus 7 Satz 2 Zus. und 14. III. E. ableiten lassen, und so

hat Simson den letzten Theil davon als Zusatz des 9ten Satzes abgeleitet.)

6. Zus. Die Quadrate der jeder Axe zugehörigen halben Ordinaten der Ellipse sind kleiner, als die Rechtecke zwischen dem Parameter der Axe, und einer oder der andern korrespondirenden Abscisse dieser Axe, um das Rechteck zwischen dem nemlichen Parameter und einer dritten Proportionallinie zu der besagten Abscisse, und umgekehrt. Es heisse nemlich Fig. 1. der Parameter der großen Axe P; so folgt aus Zus. 3. daß $HY^2 : AY \times P = AB - AY : AB$, mithin $HY^2 = AY \times P - \frac{AY^2.P}{AB} = P.(AY - \frac{AY^2}{AB})$, und eben so bey der kleinen Axe. Umgekehrt, wennn HY senkrecht ist auf einer Axe AB, und $HY^2 = AY \times P - \frac{AY_2.P}{AB}$; so liegt H auf der Ellipse. Denn wäre es nicht, so schnitte HY die Ellipse in einem andern Punkte h, und es würde $hy^2 = AY \times P - \frac{AY^2.P}{AB} = HY^2$, folglich hY = HY, was unmöglich ist.

7. Zus. Jede von den Axen der Ellipse theilt sie in 2 gleiche und ähnliche Theile, und die beyden Axen theilen sie in 4 gleiche und ähnliche Theile.

Satz 9. (Simsons 8. S.) Fig. 5.

Jede gerade von einer Ellipse begränzte, und von der einen Axe FG in S halbirte Linie Hp ist parallel mit der andern Axe AB.

Man ziehe HM, pq mit FC parallel, und diese Linien begegnen dem über AB beschriebenen Kreis in den Punkten N, r. Weil nun HM, FC, pq parallel sind; so ist HS : Sp = MC : Cq. Da aber HS = Sp; so ist MC = Cq, mithin MN = qr (14, III. E.) folglich sind HM, pq gleich (7. Satz, 2. Zus.) aber auch parallel, mithin sind Hp, Mq parallel (33, I. E.)

Simsons Zus. ist schon im 8. Satz, 5. Zus. enthalten.

Satz 10. (Simſ. 9 S.) Fig. 5.

Die große Axe AB iſt der größte, die kleine FG der kleinſte unter allen Durchmeſſern einer Ellipſe: unter den übrigen Durchmeſſern iſt der, der näher an die große Axe fällt, größer als der, der entfernter davon liegt.

1. Es ſeye CH irgend ein von den Axen verſchiedener Durchmeſſer, man ziehe HM ſenkrecht auf AB. Weil nun $CB^2 : CF^2 = AM \times MB : MH^2$ (7. Satz), aber $CB > CF$ (1. Satz, 8. Zuſ.) ſo iſt $AM \times MB > MH^2$. Addirt man beyderſeits das Quadrat von CM; ſo iſt $CB^2 > CH^2$, mithin $CB > CH$. Eben ſo wird, wenn man HS ſenkrecht an die kleine Axe zieht, bewieſen, daß $CH > CF$ ſeye, mithin iſt CB der größte, CF der kleinſte der halben Durchmeſſer.

2. Es liege ferner CF entfernter von der großen Axe als CH; ſo iſt $CH > CT$. Man ziehe die Linie TV parallel mit HM, und ſie begegne dem über AB beſchriebenen Kreis in D; ſo iſt $VD : MN = VT : HM$ (7. Satz, 2. Zuſ.), mithin $VD^2 : MN^2 = VT^2 : HM^2$, d. i. $BC^2 - CV^2 : BC^2 - CM^2 = VT^2 : HM^2$, oder $BC^2 - CV^2 : VT^2 = BC^2 - CM^2 : HM^2$, mithin $BC^2 - (CV^2 + VT^2) : VT^2 = BC^2 - (CM^2 + HM^2) : HM^2$, oder $BC^2 - CT^2 : VT^2 = BC^2 - CH^2 : HM^2$, oder $BC^2 - CT^2 : BC^2 - CH^2 = VT^2 : HM^2 = VD^2 : MN^2$. Da nun $VD^2 > MN^2$; ſo iſt $CT^2 < CH^2$, mithin $CT < CH$. (Dieſer Beweis von Nr 2. ſchien mir etwas einfacher, als der Simſonſche. Anm. des Herausgeb.)

Zuſ. Kreiſe, die man aus dem Mittelpunkt der Ellipſe, den einen mit einem Halbmeſſer, der gleich iſt der halben großen Axe, den andern mit einem Halbmeſſer, der gleich iſt der halben kleinen Axe, beſchreibt, berühren die Ellipſe, jener auſſerhalb, dieſer innerhalb.

1ſter Lehnſatz. (Simſ. L.) Figg. 7. 8.

Wenn man auf einer geraden Linie AE einen Punkt A annimmt, und zwey gerade Parallel-Linien BC, DE, beyde auf einerley Seite von AE und auf einerley Seite von A, oder beyde

nach entgegengesetzten Seiten der Linie AE und nach entgegengesetzten Seiten des Punkts A zieht, und DE : BC = EA : CA; so liegen die Punkte D, B, A in einer geraden Linie.

Denn im ersten Fall ergänze man die Parallelogramme AD, AB, so sind diese ähnlich, und haben einen gemeinschaftlichen Winkel bey A, daher liegen sie um eine Diagonale (26, VI. E.) d. h. die Punkte D, B, A sind in einer geraden Linie. Im 2ten Fall ziehe man BA, DA, so sind die Dreyecke ABC, ADE gleichwinklicht (6, VI. E.) weil nemlich BC : CA = DE : EA, und die Winkel BCA, DEA gleich sind, mithin sind die Winkel EAD, CAB gleich, folglich liegen AB, AD auf einer geraden Linie.

2ter Lehnsatz (Simſ. 2. L.) Figg. 9. 10. 11. 12.

Wenn aus 2 Punkten A, B zwey gerade Parallellinien AC, BD, und aus eben diesen Punkten zwey andere unter sich parallele gerade Linien AE, BF gezogen werden, die mit jenen ersten zusammen fallen können oder nicht, immer aber eben das Verhältniß zu einander haben, wie das erste Paar, übrigens auf einerley oder entgegengesetzten Seiten der Linie AB liegen, je nachdem die zwey zum ersten Paar gehörige Linien auf einer oder entgegengesetzten Seiten sind, und man zieht durch die Endpunkte C, D der zuerst gezogenen Linien eine gerade Linie, die mit AB in einem Punkt G zusammentrift; so liegen auch die Punkte F, E, G in einer geraden Linie.

Denn wegen der gleichwinklichten Dreyecke ist AG : BG = AC : BD = AE : BF, mithin liegen nach dem vorigen Lehnsatz F, E, G in einer geraden Linie.

3ter Lehrsatz (Simſ. 3. L.) Figg. 13. 14. 15.

Wenn alles bleibt, wie bey dem 2ten Lehnsatz, und man zieht durch die Endpunkte der Parallelen AC, BD, oder AE, BF z. B. durch C, D zwey gerade Parallelen CH, DK, die der Linie AB in H, K begegnen, und zieht dann EH, FK; so sind auch diese parallel.

Denn wegen der Parallelen AC, BD und CH, DK sind die Dreyecke ACH, BDK gleichwinklicht, mithin ist AH : BK

= AC : BD = AE : BF, und die Winkel EAH, FBK sind gleich, folglich sind die Dreyecke AHE, BKF gleichwinklicht (6, VI. E.) mithin die Winkel AHE, BKF gleich, folglich EH, FK parallel (27 oder 28. I. E.)

Saß 11. (Simf. 10. S.) Fig. 10.

Wenn man aus einem Punkt E einer Ellipse, der nicht der Scheitel der einen Axe ist, parallel mit der einen Axe CD eine Linie EF, die dem über der andern Axe AB beschriebenen Kreis in G begegnet, und dann in G eine Berührungslinie GN an diesen Kreis zieht; so begegnet diese dem gemeinschaftlichen Durchmesser des Kreises und der Ellipse in einem Punkte H, und wenn man aus H die Linie HE an die Ellipse zieht, so berührt diese die Ellipse: auch berührt die Ellipse jede gerade Linie, die man durch den Scheitel der einen Axe parallel mit der andern zieht.

1. Es seye C der Mittelpunkt des Kreises und der Ellipse, man ziehe CG. Weil nun CGN ein rechter Winkel ist, und GCB < DCB d. i. < als ein rechter; so treffen GN, CB in einem Punkt H zusammen. Zieht man nun HE, und man wollte annehmen, HE berühre die Ellipse nicht; so begegne sie ihr wieder in K. Man ziehe durch K eine mit EF parallele Linie, die der Axe AB in L, und dem Kreis in M begegne. Weil nun EF : KL = GF : ML (7ter Satz, 2. Zus.) und H, E, K in einer geraden Linie liegen; so müssen auch H, G, M in einer geraden Linie liegen (2ter Lehns.). Mithin begegnet die Linie HG dem Kreise in 2 Punkten G, M, aber nach der Voraussetzung berührt sie ihn auch, und diß ist widersprechend. Mithin kann HE der Ellipse in keinem andern Punkt als E begegnen, und berührt sie folglich in E.

2) Wenn man durch D, den Scheitel der einen Axe CD, eine gerade Linie mit der andern Axe AB parallel zieht; so berührt diese Linie die Ellipse.

Denn es seye nicht so, und sie begegne, wenns möglich ist, der Ellipse wieder in O, und durch O ziehe man eine mit CD parallele Linie, die der Linie AB in P, dem Kreise aber in Q begegne, auch begegne CD dem Kreise in R. Weil nun CO ein

Parallelogramm ist, so ist CD = PO. Aber CD : PO = CR : PQ (7. Satz, 2. Zus.), mithin ist CR = PQ, sie sind aber auch parallel, wenn man daher QR zieht, so ist diese Linie mit CP parallel, folglich ist QRC ein rechter Winkel, und doch fällt RQ innerhalb des Kreises, welches ungereimt ist (16, III. E.), mithin berührt DO die Ellipse.

Bemerk. Man könnte diesen Satz auch noch so ausdrücken: Zwey der nemlichen Ordinate FEG der großen oder kleinen Axe einer Ellipse korrespondirende Punkte E, G der Ellipse, und der über ihren Axen beschriebenen Kreise haben einerley Subtangente FH, (So heißt nemlich das zwischen der Ordinate und der Tangente abgeschnittene Stück der Abscissenlinie.)

1. Zus. (Simsons 1 Z.) Wenn EH die Ellipse berührt, und man zieht GH, so wird eben so bewiesen, daß GH den Kreis berühre.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Man kann aus einem Punkt der Ellipse nur eine einzige gerade Linie ziehen, die die Ellipse berührt: denn sollten 2 gerade Linien die Ellipse in einem Punkt berühren, so müßten auch 2 den Kreis in einem Punkt berühren gegen 16, III. E.

3. Zus. (Simsons 3. Z.) Auch kann eine gerade Linie einer Ellipse in nicht mehr als 2 Punkten begegnen, sonst könnte eine gerade Linie auch einem Kreis in mehr als 2 Punkten begegnen, was unmöglich ist: mithin ist die Ellipse nach einerley Seite, nemlich nach der Seite der Berührungslinien hin überall erhaben, nach der entgegengesetzten Seite hin hohl.

4. Zus. (Simsons 4. Z.) Der Winkel, den irgend ein Durchmesser CE (die Axen ausgenommen) mit der durch seinen Scheitel E gezogenen Berührungslinie EH nach der Seite der großen Axe hin macht, ist größer als ein rechter, nemlich CEH > CGH (21, I. E.) d. i. > als ein rechter.

5. Zus. (Simsons 5. Z.) Auch sieht man leicht, wie man, wenn die große oder kleine Axe einer gegebenen Ellipse der Lage

und Größe nach gegeben ist, an einen gegebenen Punkt derselben eine Berührungslinie ziehen kann.

6. Zus. (Simsons 6. Z.) Gerade Linien EH, ST, welche eine Ellipse in den Scheiteln eines und ebendesselben Durchmessers SCE berühren, sind parallel, (und umgekehrt). Diese Linien begegnen der einen Axe in H, T, und man ziehe an die Axe die Perpendikel EF, SV, welche dem über derselben beschriebenen Kreis in G, X begegnen. Man ziehe ferner GH, XT; so berühren diese Linien den Kreis in den Punkten G, X (1. Zus.), und, weil GF, XV in den Punkten E, S in gleichem Verhältniß getheilt werden, (7ter Satz, 2. Zus.), und SCE eine gerade Linie ist, so ist auch GCX eine gerade Linie (2ter Lehns.). Da nun GH, XT als Berührungslinien des Kreises in den Endpunkten des Durchmessers GX parallel sind, so sind es auch EG, ST (3ter Lehns.). (Und umgekehrt, wenn 2 Berührungslinien einer Ellipse EH, ST parallel sind, so sind die Berührungspunkte E, S die Scheitel eines und ebendesselben Durchmessers. Denn man ziehe dieselbe Linien wie vorhin; so sind die Dreyecke EFH, SVT ähnlich, mithin FH : EF = VT : VS. Aber auch EF : FG = VS : VX, daher FH : FG = VT : VX, mithin sind die Dreyecke GFH, XTV gleichwinklicht, und GH parallel mit XT, mithin ist in den bey G und X rechtwinklichten Dreyecken HGC, TXC, der Winkel GCH = TCX, folglich GCX eine gerade Linie, mithin auch ECS (2ter Lehns.))

7. Zus. Jede der halben Axen der Ellipse ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Linien CH, CF, wovon die eine auf der Axe zwischen dem Mittelpunkt und der Berührungslinie eines Punkts E, die andere zwischen dem Mittelpunkt, und der auf den Punkt E sich beziehenden dieser Axe zugehörigen Ordinate liegt. Nemlich es ist CH : CG = CG : CF (8, VI. E.). Aber CB = CG, daher CH : CB = CB : CF, und eben so für die andere Axe.

8. Zus. Das Stück einer Axe CF, das zwischen dem Mittelpunkt und einer Ordinate auf dieser Axe EF liegt, verhält sich zu dem Stück BF derselben Axe, das zwischen ihrem Scheitel

und der Ordinate liegt, wie diese halbe Axe CB zu der Linie BH, die zwischen ihrem Scheitel, und der aus E gezogenen Tangente liegt: auch ist die Subtangente FH die 4te Proportionallinie zu dem Stück der Axe CF von dem Mittelpunkt bis zur Ordinate und zu den beyden Abscissen der Axe AF, BF. Denn CF : CB = CB : CH (vor. Zus.) daher $CF : \left\{\begin{matrix} CB - CF \\ BF \end{matrix}\right. = CB : \left\{\begin{matrix} CB - CH. \\ BH \end{matrix}\right.$

Daher auch $CF : BF = \left\{\begin{matrix} CF + CB \\ AF \end{matrix}\right. : \left\{\begin{matrix} BF + BH \\ FH. \end{matrix}\right.$

9. Zus. Wenn man an einen Punkt der Ellipse eine Berührungslinie an die Ellipse, und in demselben Punkt auf diese Berührungslinie ein Perpendikel zieht, und diß bis an die Linie, auf der die Abscissen genommen sind, (hier zunächst an eine der Axen) verlängert, so heißt diß Perpendikel die **Normallinie** für den besagten Punkt der Ellipse. Das Stück, das auf der Abscissenlinie (hier auf der Axe) zwischen diesem Perpendikel und der Ordinate liegt, heißt die **Subnormallinie**. In der Ellipse verhält sich nun die Subnormallinie OF (Fig. 17.) auf einer der Axen zu dem Stück CF dieser Axe zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate, wie der Parameter P dieser Axe zu der Axe AB. Denn $OF : CF = OF \times FH : CF \times FH$. Es ist aber, weil OEH ein rechtwinklichtes Dreyeck ist, $OF \times FH = EF^2$, und $CF \times FH = AF \times BF$ (8. Zus.), folglich $OF : CF = EF^2 : AF \times BF = P : AB$ (8. Satz, 3. 4. Zus.). Und eben so wirds für die andere Axe erwiesen.

10. Zus. Der Unterschied der Quadrate zweyer halben Ordinaten der einen Axe verhält sich zum Unterschied der Quadrate der korrespondirenden Subnormallinien dieser Axe, wie das Quadrat dieser Axe zu dem Quadrat der andern, oder wie diese Axe zu ihrem Parameter; und der Unterschied der Quadrate zweyer halben Ordinaten der einen Axe verhält sich zum Unterschied der Quadrate der korrespondirenden Normallinien, wie das Quadrat dieser Axe zu dem Unterschiede der Quadrate der beyden Axen. Es seyen Fig. 17. EO, GK die Normallinien, OF, KL

die Subnormallinien für 2 Punkte E, G der Ellipse; so ist $\left.\begin{matrix}CF\\CL\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}OF\\KL\end{matrix}\right\} = AB : P$ (9. Zus.) mithin $CF^2 : OF^2 = CL^2 : KL^2 = CL^2 - CF^2 : KL^2 - OF^2 = AB^2 : P^2$. Nun ist $EF^2 : AC^2 - CF^2 = GL^2 : AC^2 - CL^2 = EF^2 - GL^2 : CL^2 - CF^2 = P : AB$ (8. Satz, 3. Zus.) folglich 1) $EF^2 - GL^2 : KL^2 - OF^2 = AB : P = AB^2 : DJ^2$ und 2) $EF^2 - GL^2 : \left\{\begin{matrix}EF^2 - GL^2 - KL^2 + OF^2\\EO^2 - KG^2\end{matrix}\right\} = AB^2 : AB^2 - DJ_2$. Und eben so ists für die andere Axe.

11. Zus. Die Normallinien beyder Axen nehmen zu von dem Scheitel der großen Axe bis zu den Scheiteln der kleinen Axe. Denn $EF^2 - GL^2$ ist immer eine positive Größe, die um so größer wird, je näher der Punkt E bey dem Scheitel der kleinen, und der Punkt G bey dem Scheitel der großen Axe liegt, mithin ist auch $EO^2 - KG^2$ eine positive Größe, die unter denselben Umständen gleichfalls wächst.

12. Zus. Die 2 auf die beyden Axen sich beziehenden Normallinien Eo, EO (Fig. 17.) eines und eben desselben Punkts E einer Ellipse stehen unter einander in dem umgekehrten duplizirten Verhältniß der Axen, auf die sie sich beziehen. Denn $Eo : EO = \left.\begin{matrix}Ef\\CF\end{matrix}\right\} : OF$, weil $\Delta oEf \sim \Delta EOF$. Aber $CF : OF = AB : P$ (9. Zus.) $= AB^2 : DJ^2$, mithin $Eo : EO = AB^2 : DJ^2$.

Satz 12. (Simsons 11. S.) Fig. 18. 19.

Wenn man aus einem Punkt der Ellipse F an die beyde Brennpunkte die Linien FD, FE zieht, und eine Linie FH den Nebenwinkel DFE d. i. den Winkel EFG halbirt, so berührt diese die Ellipse in F.

1. Fall. Wenn (Fig. 18.) die Linie FH parallel ist mit der großen Axe AB. Man mache FG = FE, und ziehe EG, die der geraden Linie FH in H begegne; so ist (4. I. E.) EH = HG, und weil FH, ED parallel sind; so ist EH : HG = DF : FG, mithin DF = FG = FE, folglich ist F der Scheitel der kleinen Axe (3ter Satz, 2ter Zus.), folglich berührt FH die Ellipse (11ter Satz 2.)

2. Fall. Begegnet hingegen (Fig. 19.) FH der großen Axe AB in K; so beschreibe man über AB einen Kreis, und fälle aus F auf AB das Perpendikel FL, das verlängert dem Kreis in M begegne. Man ziehe MK, und an den Mittelpunkt MC, und mache BN = EF, so ist AN = DF (1. Satz). Weil nun der äussere Winkel EFG des Dreyecks DFE durch die Linie FH halbirt ist, die der Linie AB in K begegnet; so ist DK : KE = DF : FE *) = AN : NB, mithin auch DK+KE : KE = AB : NB, und $\left.\begin{matrix}\frac{DK+KE}{2}\\ CK\end{matrix}\right\} : KE = BC : NB$, folglich $CK : \left\{\begin{matrix}CK - KE\\ CE\end{matrix}\right\}$ $= BC : \left\{\begin{matrix}BC - NB\\ CN\end{matrix}\right.$, oder CK : BC = CE : CN d. i. = BC : CL (4ter Satz). Aber BC = CM, mithin CK : CM = CM : CL, folglich sind die Dreyecke CMK, CLM ähnlich, mithin der Winkel CMK ein rechter, folglich berührt MK den Kreis (16, III. E.) mithin auch FK die Ellipse (11ter Satz).

Anders so: Man verlängere DF bis G, so, daß FG = FE, und nehme auf der verlängerten Linie FK irgend einen Punkt O, und ziehe OE, OD, OG, EG; und EG begegne der Linie FK in P. Weil nun FE = FG, und FP gemeinschaftlich, und die Winkel EFP, GFP gleich sind, so ist EP = PG, und die Winkel bey P rechte, mithin OE = OG. Aber DO + OG > DG, mithin auch DO + OE > DG d. i. > DF + FE oder > AB: folglich ist der Punkt O ausserhalb der Ellipse (1. Satz, 3. Zus.) mithin berührt FK die Ellipse.

1. Zus. (Simsons Zus.) Umgekehrt, wenn eine Linie FH die Ellipse in F berührt, und man von F an die Brennpunkte die Linien FD, FE zieht; so sind die Winkel DFO, EFK, welche diese Linien mit der Berührungslinie auf entgegengesetzten Seiten derselben machen, unter sich gleich. Denn wären sie ungleich, so müßten, wenn man DF nach G hin verlängert, auch die Winkel EFK, GFK ungleich seyn. Nun berührt aber nach dem gegen-

---

*) Diß ist der 2te Fall von 3, VI. Ek. der dort hinzugefügt, und beinahe mit denselben Worten wie der 1ste bewiesen werden kann.

wärtigen Satz die den Winkel EFG halbirende Linie die Ellipse in F, nach der Voraussetzung aber soll sie auch FK in F berühren, welches widersprechend ist (11ter Satz, 2. Zus.). (Und wenn von 2 Linien, die mit einer Tangente der Ellipse nach 2 entgegengesetzten Seiten hin in dem Berührungspunkt gleiche Winkel machen, die eine durch einen Brennpunkt geht, so geht die andere durch den andern Brennpunkt. Von dieser Eigenschaft haben eben die Brennpunkte ihren Nahmen).

2. Zus. Jede Berührungslinie einer Ellipse, die nicht durch einen Scheitel ihrer Axen geht, begegnet verlängert beyden Axen: und es verhalten sich die Entfernungen der Brennpunkte von dem Punkt, in welchem sie der verlängerten großen Axe begegnet, zu einander, wie die Entfernungen der Brennpunkte von dem Berührungspunkt. Denn, wie oben (3. Satz, 2. Zus.) gezeigt worden ist, ist eine der Linien DF größer als die andere DE, mithin DEF > FDE, folglich der Winkel HFE $\left(= \frac{EFG}{2} = \frac{DEF + FDE}{2}\right) <$ DEF, mithin sind die Winkel HFE + FEK < 2 rechte, und die Linien FH, AB schneiden sich nothwendig in einem Punkt K, wo dann, wie oben gezeigt worden ist, DK : EK = DF : EF. Was die kleine Axe betrift, so muß die Tangente FH, die der Linie FL begegnet (denn daß FH, FL nicht zusammenfallen, erhellet aus 8. Satz, 1. Zus.) auch der mit ihr parallelen kleinen Axe begegnen.

3. Zus. Wenn man an einen Punkt der Ellipse aus beyden Brennpunkten gerade Linien zieht, so theilt die Normallinie in diesem Punkt den dadurch entstandenen Winkel in 2 gleiche Theile und umgekehrt.

4. Zus. Aus diesem Satz ergiebt sich eine von der im vorigen Satz 5. Zus. angedeuteten Art verschiedene Methode, an einen gegebenen Punkt F einer Ellipse, deren große Axe und Brennpunkte man kennt, eine Tangente zu ziehen, indem man nemlich aus den Brennpunkten die Linien DF, EF zieht, und den durch Verlängerung der einen dieser Linien entstandenen äußern Winkel EFG halbirt.

5. Zus. Aus einem Punkt C (Fig. 20.) ausserhalb einer Ellipse, deren große Axe und Brennpunkte man kennt, an die Ellipse eine Berührungslinie zu ziehen, beschreibe man einen Kreis aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CD, oder der Entfernung des Punkts C von dem ihm zunächst gelegenen Brennpunkt, und einen zweyten Kreis aus dem andern Brennpunkt E mit einem Halbmesser gleich der großen Axe der Ellipse AB, ziehe dann aus E an die Punkte F, G, in welchen die beyde Kreise sich schneiden, (was, wie aus 1. Satz, 2. Zus. erhellet, immer geschehen wird) Linien EF, EG, die der Ellipse in H, J begegnen, und endlich die Linien CH, CJ; so berühren diese die Ellipse. Denn z. B. für CJ ist, weil EG = AB = EJ + DJ ist, DJ = JG. Da nun auch CD = CG, und CJ in den beyden Dreyecken CJD, CJG gemeinschaftlich ist; so sind die Winkel CJD, CJG gleich, folglich berührt CJ die Ellipse, und eben so wird es von CH bewiesen.

Satz 13. (Simsons 12. S.) Aufg. Fig. 19.

Wenn in einer Ellipse die große Axe AB, und die Brennpunkte D, E gegeben sind, eine gerade Linie mit der der Lage nach gegebenen ST parallel zu ziehen, die die Ellipse berühre.

Man fälle aus einem Brennpunkte z. B. aus E die Linie EV senkrecht auf ST, und beschreibe aus D mit dem Halbmesser AB einen Kreis, der der Linie EV in 2 Punkten begegnen wird. Einer derselben sey G. Man ziehe DG, die der Ellipse in F begegne, durch F ziehe man FK parallel mit ST; so berührt FK die Ellipse in F. Denn FK begegne der Linie EG in P; so sind bey P rechte Winkel. Man ziehe EF. Da nun DG = AB = DF + EF; so ist FE = FG, mithin der Winkel FEG = FGE, folglich auch EFK = GFK, mithin berührt FK die Ellipse in F (12ter Satz.)

Satz 14. Aufg. Fig. 21.

Wenn man in einer Ellipse die Axen, folglich auch die Brennpunkte kennt, eine Normale an dieselbe zu ziehen, die mit einer der Lage nach gegebenen Linie ST parallell lauffe.

Wenn die der Lage nach gegebene Linie ST mit einer der

Axen parallel ist, so ist diese Axe selbst die verlangte Normale. Ist sie aber mit keiner der Axen parallel, so ziehe man aus dem Mittelpunkt C mit der vorgegebenen Linie ST die HCh parallel, und beschreibe aus einem der Brennpunkte z. B. E als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, der gleich ist der halben großen Axe, einen Kreis, der der Linie HCh in H, h begegne, ziehe dann die Linien EH, Eh, die, wenns nöthig ist, verlängert, der Ellipse in J, i begegnen, und durch J, i die Linien JK, iK parallel mit ST, so werden diese Normalen an die Ellipse seyn. Denn $EH = AC = \frac{DJ + BJ}{2}$, und $EJ : EH = EK : EC$, mithin auch $EJ : \left\{ \begin{matrix} 2EH \\ DJ + EJ \end{matrix} \right\} = EK : \left\{ \begin{matrix} 2EC \\ ED \end{matrix} \right.$ oder $EJ : DJ = EK : DK$, folglich theilt JK den Winkel EJD in 2 gleiche Theile (3, VI. E.) und ist mithin eine Normale an die Ellipse (12. Satz, 3. Zus.)

Satz 15. (Simsons 13. S.) Fig. 22.

Alle gerade, mit einer Berührungslinie parallele, und beiderseits durch eine Ellipse begränzte Linien werden von dem Durchmesser halbirt, der durch den Berührungspunkt geht, oder sind Ordinaten dieses Durchmessers.

Wenn der Durchmesser eine der beyden Axen ist; so ist die durch den Scheitel desselben gezogene Berührungslinie parallel mit der andern Axe (11 Satz und 11. S. 2. Zus.), mithin ist jede mit der Berührungslinie parallele Linie mit dieser andern Axe parallel, und wird folglich von dem Durchmesser halbirt, der durch den Berührungspunkt geht (8. Satz).

Es sey nun CE irgend ein anderer Durchmesser, und es berühre EF die Ellipse in seinem Scheitel E; eine mit EF parallel gezogene Linie GH habe ihre Endpunkte G, H in der Ellipse, und begegne dem Durchmesser in K; so ist GK = HK. Denn es begegne EF der einen Axe AB in F: eben dieser Axe begegne GH in L, und man fälle durch die Punkte E, G, H auf AB die Perpendikel EM, GN, HO, die dem über AB beschriebenen Kreis in den Punkten P, Q, R begegnen, und ziehe FP, LQ,

welche letztere Linie der Linie CP in S begegne, endlich ziehe man SK. Weil nun EF die Ellipse berührt, so berührt FP den Kreis (11. Satz, 1. Zus.), und weil die Parallellinien QN, RO in G, H nach gleichen Verhältnissen getheilt sind, und HGL eine gerade Linie ist; so sind auch die Punkte L, Q, R in einer geraden Linien (2ter Lehns.). Und, weil die Parallelen PM, QN in E, G nach gleichen Verhältnissen getheilt sind, und durch E, G die Parallelen EF, GL gezogen sind; so sind auch FP, LQ parallel (3ter Lehns.): mithin ist CS : SP = (CL : LF =) CK : KE, folglich ist (2, VI. E.) KS parallel mit EP folglich parallel mit QN, RO, mithin ist GK : KH = QS : SR. Aber QS = SR, weil nemlich CP mit der Berührungslinie des Kreises PF, folglich auch mit ihrer Parallele RQ einen rechten Winkel macht: folglich ist auch GK = KH.

1. Zus. (Simsons 1. Z.) Umgekehrt: Jede gerade durch eine Ellipse begränzte Linie GH, die von einem Durchmesser CE halbirt wird, d. h. jede Ordinate des Durchmessers CE ist parallel mit der geraden Linie EF, die diesen Durchmesser in seinem Scheitel E berührt. Denn, wenn sie es nicht ist, so ziehe man eine mit GH parallele Berührungslinie (13. Satz); so wird GH durch den Durchmesser halbirt, der durch den Berührungspunkt dieser Tangente gezogen wird: aber auch durch den davon verschiedenen Durchmesser CE, welches unmöglich ist.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Alle Ordinaten eines Durchmessers sind mithin unter sich parallel.

3. Zus. (Simsons 3. Z.) Und wenn die Endpunkte von 2 oder mehreren Parallelen in einer Ellipse liegen; so halbirt der Durchmesser, der eine von ihnen halbirt, auch die andere. Denn die Parallele, die er halbirt, ist parallel mit der Tangente, die durch den Scheitel des Durchmessers geht; folglich sind auch die übrigen mit dieser Tangente parallel, und werden mithin von dem Durchmesser halbirt.

4. Zus. (Simsons 4. Z.) Umgekehrt, eine gerade Linie, welche 2 gerade von einer Ellipse begränzte Linien halbirt, ist ein

Durchmesser. Denn sie seye es nicht, so ziehe man einen Durchmesser, der eine von ihnen halbirt, so halbirt er auch die andere, beyde Linien werden aber auch von einer andern Linie halbirt, was unmöglich ist. Und wenn man aus einem Berührungspunkt eine gerade Linie zieht, welche eine mit der Berührungslinie und von der Ellipse begränzte Linie halbirt; so ist diese ein Durchmesser. Denn sie seye es nicht, und man ziehe einen Durchmesser durch den Berührungspunkt, so halbirt auch dieser die Parallele der Tangente, was unmöglich ist.

5. Zus. (Simsons 5. Z.) Eine gerade Linie, die durch den Scheitel eines Durchmessers parallel mit seinen Ordinaten gezogen ist, berührt die Ellipse.

6. Zus. (Simsons 6. Z.) Zwey gerade Linien in einer Ellipse, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, halbiren einander nicht beyde. Denn sonst wäre jede parallel mit der Tangente an die Ellipse, die durch den Scheitel des Durchmessers geht, den man durch den Punkt ziehen kann, in dem sich die geraden Linien schneiden, mithin wären sie unter sich parallel, was unmöglich ist.

Satz 16. (Simsons 14. S.) Fig. 22.

Zwey Durchmesser ET, VX, wovon der eine VX parallel ist mit der geraden Linie EF, die die Ellipse in dem Scheitel des andern berührt, sind zugeordnete Durchmesser.

Man ziehe durch die Scheitel E, V an die eine Axe AB gerade Linien EM, VY parallel mit der andern Axe CD, und diese Linien begegnen dem über AB beschriebenen Kreis in den Punkten P, Z auf der Seite des Durchmessers, auf welcher E, V liegen, und man ziehe aus dem Punkt F, in welchem EF der Axe AB begegnet, die gerade Linie FP, die den Kreis berühren wird (11. Satz, 1. Zus.). Aus Z ziehe man an den Kreis die Berührungslinie Zα, die der Axe in α begegne; so wird, wenn man die Linie αV zieht, diese die Ellipse berühren (11ter Satz), endlich ziehe man aus dem Mittelpunkt die Linien CP, CZ.

Weil nun die Parallelen PM, ZY nach gleichen Verhältnis-

sen in den Punkten E, V getheilt sind, durch welche die Parallelen EF, VC gezogen sind; so sind auch FP, CZ parallel (3ter Lehns.). Nun ist CPF ein rechter Winkel, mithin auch PCZ. Es ist aber auch CZα ein rechter Winkel, folglich sind CP, Zα, mithin auch CE, αV Parallellinien (3ter Lehns.). Die mit CE parallele Linien sind daher auch parallel mit der Linie αV, die die Ellipse in V berührt, und werden daher nach dem vorherg. Satz von dem Durchmesser CV halbirt. Und weil CV nach der Voraussetzung parallel ist mit EF; so sind alle mit CV parallele Linien auch mit EF parallel, und werden daher von dem Durchmesser CE halbirt: mithin sind CE, CV zugeordnete Durchmesser (7. Erklär.).

1. Zus. (Simsons 1. Z.) Und weil kein anderer Durchmesser als CV die mit CE paralle und beyderseits von der Ellipse begränzte gerade Linien halbiren kann; so ist CV der einzige dem Durchmesser CE zugeordnete Durchmesser.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Wenn daher CE, CV zugeordnete Durchmesser sind; so ist jeder davon parallel mit der durch den Scheitel des andern gezogenen Berührungslinie.

3. Zus. (Simsons 3. Z.) Umgekehrt, jede gerade Linie, die durch den Scheitel eines Durchmessers parallel gezogen wird mit seinem zugeordneten Durchmesser, berührt die Ellipse in diesem Scheitel.

4. Zus. (Simsons 4. Z.) Eine gerade mit einem Durchmesser parallele, und von einer Ellipse begränzte Linie wird von dem jenem ersten zugeordneten Durchmesser halbirt: denn sie ist parallel mit der Tangente durch den Scheitel dieses zugeordneten Durchmessers, und wird daher von diesem halbirt. Umgekehrt, wenn sie von einem Durchmesser halbirt wird; so ist sie parallel mit seinem zugeordneten Durchmesser.

Satz 17. (Simsons 15. S.) Fig. 22.

Wenn man aus einem Punkt G einer Ellipse an den einen von zwey zugeordneten Durchmessern ET eine gerade Linie GK parallel mit dem andern VX zieht; so verhält sich das Quadrat

des Durchmessers ET, an den man die gerade Linie gezogen hat, zu dem Quadrat des andern Durchmessers VX, wie das Rechteck TK × KE, zwischen den Stücken des ersten Durchmessers von seinen Scheiteln an bis an die gezogene Linie, zu dem Quadrat von GK (wie das Rechteck aus den Abscissen zu dem Quadrat der halben Ordinaten. Ist Verallgemeinerung vom 7. Satz.)

Denn, weil ET, VX zugeordnete Durchmesser sind; so ist VX parallel mit der Berührungslinie EF, die durch den Scheitel des andern Durchmessers ET geht. Es bleibe nun alles, was in den beyden letzten Sätzen verzeichnet und bewiesen worden, und es begegne die Verlängerung der Linie SK der Axe AB in β, durch G ziehe man eine Linie $G\gamma$ parallel mit AB, die der Linie $S\beta$ in V begegne. Weil nun der Winkel PCZ ein rechter ist, und CPM+MCP ebenfalls einen rechten ausmachen, so ist MCZ = CPM. Aber auch CP = CZ, mithin sind die Dreyecke PMC, CYZ gleich, folglich PM = CY. Weil aber PM, $S\beta$, und eben so PF, SL parallel sind, so sind die Dreyecke PFM, $SL\beta$, folglich auch CPM, $SL\beta$ gleichwinklicht (8, VI. E.), mithin CP : MP = SL : $L\beta$ d. i. wegen der Parallelen = SQ : $N\beta$, und verwechselt CP : SQ = (PM : $N\beta$ d. i. = CY : $G\gamma$, d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyecke CVY, $GK\gamma$ =) CV:GK, mithin $CP^2 : SQ^2 = CV^2 : GK^2$. Aber $CP^2 : CS^2 = CE^2 : CK^2$, folglich $CP^2 : SQ^2 = CE^2 : EK \times KT$ (5, II. E.) mithin $CV^2 : GK^2 = CE^2 : EK \times KT$, oder verwechselt $CV^2 : CE^2 = GK^2 : EK \times KT$, oder $ET^2 : VX^2 = EK \times KT : GK^2$.

Es verhält sich mithin überhaupt das Quadrat eines jeden Durchmessers zu dem Quadrat des ihm zugeordneten Durchmessers, wie das Rechteck zwischen den von einer dem ersten Durchmesser zugehörigen Ordinate abgeschnittenen Abscissen auf demselben zu dem Quadrat dieser halben Ordinate. Denn die einem Durchmesser zugehörige Ordinate ist parallel mit der Berührungslinie durch den Scheitel dieses Durchmessers, mithin parallel mit seinem zugeordneten Durchmesser.

1. Zus.) (Simsons 1. Z.) Die Quadrate der einem und eben

demselben Durchmesser zugehörigen Ordinaten verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke zwischen den zugehörigen Abscissen, wie diß in Ansehung der Axen Satz 8. 4. Zus. gezeigt worden ist.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Wenn ET, VX zwey zugeordnete Durchmesser einer Ellipse sind, und man zieht aus einem Punkt G eine gerade Linie GK mit einem derselben parallel, die dem andern in T begegnet, und wenn $ET^2 : VX^2 = EK \times KT : GK^2$; so liegt der Punkt G auf der Ellipse. Denn, wenn GK der Ellipse auf der Seite des Durchmessers ET, auf welcher G liegt, nicht in dem Punkt G begegnet, so begegne sie ihr in einem davon verschiedenen Punkt δ, so ist $EK \times KT : \delta K^2 = ET^2 : VX^2 = EK \times KT : GK^2$, mithin müßte $\delta K = GK$ seyn, was unmöglich ist. (Wenn der ET zugehörige Parameter P heißt, so liesse sich dieser Zusatz auch noch so ausdrücken: wenn $ET : P = EK \times KT : GK^2$; so liegt G auf der Ellipse (9. Erklär.))

3. Zus. (Simsons 3. Z.) Und, wenn aus 2 Punkten G, ϵ, von denen ϵ auf der Ellipse liegt, GK, $\epsilon\zeta$ parallel mit den Ordinaten eines Durchmessers ET gezogen werden, und $EK \times KT : E\zeta \times \zeta T = GK^2 : \epsilon\zeta^2$; so liegt auch der andere Punkt G auf der Ellipse. Dieser Zus. wird eben so aus Zus. 1. abgeleitet, wie Zus. 2. aus dem Satz selbst.

4. Zus. (Sims. 4. Z.) Wenn man über dem Durchmesser AB (Fig. 23.) einer Ellipse einen Kreis beschreibt, und halbe Ordinaten DE, FG an den Durchmesser zieht, aus den Punkten D, F dann senkrecht auf AB die Linien DH, FK errichtet, die dem Kreis in H, K begegnen; so ist $DH : FK = DE : FG$. Denn es ist $DE^2 : FG^2 = AD \times DB : AF \times FB = DH^2 : FK^2$, folglich $DH : FK = DE : FG$ (22, VI. E.)

5. Zus. (Simsons 5. Z.) Wenn zwey einerley Durchmesser zugehörige Ordinaten auf demselben zwischen sich und dem Mittelpunkt gleiche Stücke abschneiden; so sind sie einander gleich: und, wenn sie einander gleich sind, so schneiden sie gleiche Stücke ab.

Satz

Satz 18. (Simsons 16. S.) Fig. 24.

Wenn man aus einem Punkt E einer Ellipse eine Ordinate an einen Durchmesser AB zieht, und aus dem Punkt D ein Perpendikel DH auf AB errichtet, das dem über AB beschriebenen Kreis in H begegnet, und die den Kreis in H berührende Linie dem Durchmesser AB in L begegnet, und man noch EL zieht; so berührt EL die Ellipse, und umgekehrt.

Denn, wenn EL die Ellipse nicht berührt, so begegne sie ihr wieder in einem andern Punkt M, man ziehe durch M an den Durchmesser die Linie MN parallel mit ED, in N errichte man ein Perpendikel auf AB, das dem Kreis, nach der Seite von AB hin, auf welcher H liegt, in O begegne. Weil nun DE, NM und eben so DH, NO parallel sind, und DE : MN = DH : NO (17ter Satz, 4. Zus.), und E, M, L in einer geraden Linie liegen; so liegen auch H, O, L in einer geraden Linie (2ter Lehns.), mithin schneidet LH den Kreis, und doch soll sie ihn auch berühren, was unmöglich ist. Mithin muß EL die Ellipse berühren. Völlig eben so wird bewiesen, wenn EL die Ellipse berühre, so berühre auch LH den Kreis.

Zus. (Simſ. 3.) Hieraus erhellet, wie man, wenn die Lage und Größe des Durchmessers einer Ellipse, und der Winkel, den sie mit ihren Ordinaten macht, gegeben ist, eine gerade Linie ziehen kann, die die Ellipse in einem gegebenen Punkt berühre.

Satz 19. (Simsons 17. S.) Fig. 23.

Wenn man aus einem Punkt E einer Ellipse eine gerade Linie zieht, die sie berührt, und einem Durchmesser AB in L begegnet, und von dem Berührungspunkt E eine Ordinate ED an diesen Durchmesser zieht; so ist der halbe Durchmesser BC die mittlere Proportionallinie zwischen CL und CD, nemlich zwischen den Stücken des Durchmessers, die zwischen dem Mittelpunkt und der Tangente, und zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate liegen: die Stücke des Durchmessers hingegen zwischen seinen Scheiteln und der Berührungslinie verhalten sich, wie die Stücke desselben Durchmessers zwischen seinen Scheiteln und der Ordinate.

1.) Man beschreibe über dem Durchmesser AB einen Kreis, errichte in D auf AB das Perpendikel DH, das dem Kreis in H begegne, und ziehe HL. Weil nun HL den Kreis berührt (18ter Satz), und HD senkrecht auf dem Durchmesser ist; so ist $CD : \left\{\begin{matrix} CH \\ CB \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} CH \\ CB \end{matrix}\right. : CL$. Vgl. 11. Satz, 7. Zus.

2.) Weil $CL : CB = CB : CD$; so ist auch $CL : \left\{\begin{matrix} CL - CB \\ BL \end{matrix}\right\} = CB : \left\{\begin{matrix} CB - CD \\ BD \end{matrix}\right.$, mithin $2.CL : BL = \left.\begin{matrix} 2CB \\ AB \end{matrix}\right\} : BD$, folglich $\left.\begin{matrix} 2CL - BL \\ AL \end{matrix}\right\} : BL = \left\{\begin{matrix} AB - BD \\ AD \end{matrix}\right\} : BD$.

1. Zus. (Simsons 1. Z.) Daher ist das Rechteck aus den Stücken des Durchmessers zwischen der Ordinate und dem Mittelpunkt und zwischen der Ordinate und der Tangente gleich dem Rechteck aus den Stücken des Durchmessers zwischen seinen Scheiteln und der Ordinate. Denn, weil $CD : CB = CB : CL$; so ist $CB^2 = DC \times CL$, mithin, wenn man beyderseits CD^2 abzieht, $AD \times DB = CD \times DL$ (5. und 3. II. E.) Vgl. 11. Satz, 8. Zus.)

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Und das Rechteck aus den Stücken des Durchmessers zwischen der Tangente und dem Mittelpunkt, und zwischən der Tangente und der Ordinate ist gleich dem Rechteck aus ihren Stücken zwischen der Tangente und den Scheiteln des Durchmessers. Denn zieht man von CL^2 die gleiche Größen CB^2 und $DC \times CL$ ab; so bleibt der Rest $AL \times LB = CL \times LD$ (6. und 3. II. E.)

Satz 20. (Simsons 18. S.) Fig. 23.

Wenn man aus einem Punkt E einer Ellipse an einen Durchmesser AB eine Ordinate ED, und eine Linie EL zieht, die dem Durchmesser in L begegnet, und CL (das Stück zwischen dem Mittelpunkt und L) der halbe Durchmesser CB, und das Stück CD zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate proportional sind; so berührt EL die Ellipse: oder zweytens, wenn die Stücke zwischen L und den Scheiteln des Durchmessers sich eben so verhalten, wie die Stücke der Ordinate und eben diesen Scheiteln: oder

drittens, wenn die Stücke zwischen der Ordinate und den Punkten L, A, B, C — oder endlich, wenn die 4 Stücke zwischen L und den Punkten A, C, D, B proportional sind: so berührt in allen diesen Fällen EL die Ellipse.

1) Wenn EL die Ellipse nicht berührt; so berühre sie in E eine andere Linie EP: mithin ist, nach dem vorherg. Satz $CP : CB = CB : CD$, aber nach der Voraussetzung auch $CL : CB = CB : CD$, mithin $CP = CL$, was unmöglich ist. Folglich berührt EL die Ellipse.

2) Weil nach der Voraussetzung $AL : BL = AD : BD$; so ist $AL + BL : BL = AB : BD$, mithin $CL : BL = CB : BD$, oder $CL : \left\{\begin{matrix} CL - BL \\ CB \end{matrix}\right\} = CB : \left\{\begin{matrix} CB - BD \\ CD \end{matrix}\right.$, folglich berührt EL die Ellipse nach Nr. 1.

3) Weil $DL : DA = DB : DC$; so ist $\left.\begin{matrix} DL + DA \\ LA \end{matrix}\right\} : DA = \left\{\begin{matrix} BC : DC \\ CA \end{matrix}\right.$, mithin $\left.\begin{matrix} LA - CA \\ CL \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} DA - DC \\ CB \end{matrix}\right\} = BC : DC$, folglich berührt EL die Ellipse nach Nr. 1.

Endlich 4) da $AL : CL = DL : BL$; so ist $\left.\begin{matrix} AL - CL \\ CB \end{matrix}\right\} : CL = \left\{\begin{matrix} DL - BL \\ DB \end{matrix}\right\} : BL$, mithin $CB : CL = \left\{\begin{matrix} CB - DB \\ CD \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} CL - BL, \\ CB \end{matrix}\right.$ oder $CL : CB = CB : CD$, folglich berührt wieder EL die Ellipse nach Nr. 1.

Satz 21. (Simsons 19. S.) Fig. 24.

Wenn aus den Scheiteln A, B von 2 zugeordneten Durchmessern CA, CB einer Ellipse an einen dritten Durchmesser DE hin Ordinaten AF, BG gezogen werden; so ist das Quadrat des Stücks $\left\{\begin{matrix} CF \\ CG \end{matrix}\right\}$, das zwischen der einen dieser Ordinaten und dem Mittelpunkt liegt, gleich dem Rechteck aus den Stücken $\left\{\begin{matrix} EG\ GD \\ EF,\ FD, \end{matrix}\right\}$ die zwischen der andern Ordinate und den Scheiteln des Durchmessers, an den sie gezogen sind, abgeschnitten werden.

Man ziehe in den Punkten A, B an die Ellipse die Berührungslinien AH, BK. Weil nun CB, AH und auch BG, AF parallel sind;

so sind die Dreyecke CBG, HAF gleichwinklicht. Weil aber auch BK, CA parallel sind; so sind auch die Dreyecke CBK, HAC gleichwinklicht: mithin ist CG : FH = CB : AH = CK : CH. Es ist aber sowohl CG : CD = CD : CK, als CF : CD = CD : CH (19ter Satz), daher CF : CG = CK : CH, mithin auch CF : CG = CG : FH, mithin CG^2 = CF × FH. Aber das Rchtck EF × FD = CF × FH (19ter Satz, 1. Zus.), folglich CG^2 = EF × FD, und nimmt man von dem Quadrat von CD diese beyde gleiche Stücke hinweg; so bleibt EG × GD = CF^2 (5, II. E.)

1. Zus. Man könnte diesen Satz auch noch so ausdrücken: Es seyen CA, CB irgend 2 zugeordnete Durchmesser einer Ellipse, CD, CL irgend ein anderes Paar von zugeordneten Durchmessern. Wenn man nun aus dem Scheitel A eines Durchmessers des ersten Paars eine Ordinate AM an einen Durchmesser CL des 2ten Paars, und eben so aus dem Scheitel B des 2ten Durchmessers des ersten Paars eine Ordinate BG an den 2ten Durchmesser des 2ten Paars zieht, so ist das Quadrat jener ersten Ordinate AM gleich dem Rechteck aus den von dieser 2ten Ordinate abgeschnittenen Abscissen EG, GD. Denn da AMCF ein Parallelogramm ist, so ist AM^2 = CF^2 = EG × GD.

2. Zus. (Simsons 1. Z.) Der halbe Durchmesser CD, an den die Ordinaten AF, BG gezogen werden, verhält sich zu seinem zugeordneten halben Durchmesser CL, wie $\begin{Bmatrix}CF\\CG\end{Bmatrix}$ die Entfernung der einen Ordinate vom Mittelpunkt zu der andern Ordinate $\begin{Bmatrix}BG\\AF\end{Bmatrix}$. Denn $CD^2 : CL^2$ = EF × FD : AF^2 (17ter Satz) = $CG^2 : AF^2$, mithin CD : CL = CG : AF. Und eben so wird gezeigt, daß CD : CL = CF : BG.

3. Zus. Aus dem vorigen Zus. folgt noch CG:AF = CF:BG, oder, wenn man, wie in Zus. 1. aus A an CL die Ordinate AM, und eben so aus B an CL die Ordinate BN zieht, BN : AF = AM : BG.

4. Zus. Sind die zugeordnete Durchmesser CD, CL die Axen der Ellipse, so sind die Ordinaten BN, AM, AF, BG senkrecht

darauf, oder sie sind die Entfernungen der Punkte B, A von den Axen CL, CD. Diese Entfernungen der Scheitel A, B 2 zugeordneter Durchmesser von den Axen der Ellipse sind mithin umgekehrt proportional.

5. Zus. (Simsons 2. Z.) Die Summe der Quadrate der auf einem Durchmesser CD durch die (aus den Scheiteln von zwey zugeordneten Durchmessern gezogene) Ordinaten AF, BG von dem Mittelpunkt an abgeschnittenen Stücke ist gleich dem Quadrat dieses halben Durchmessers CD. Denn, weil $CG^2 = EF \times FD$; so ist $CG^2 + CF^2 = EF \times FD + CF^2 = CD^2$ (5. II. E.).

6. Zus. (Simsons 3. Z.) Die Summe der Quadrate irgend 2 zugeordneter Durchmesser ist gleich der Summe der Quadrate der Axen. Denn es seyen CL, CD die Axen, und AM, AF, BN, BG darauf senkrecht; so ist (5. Zus.) $CD^2 = CF^2 + CG^2$, und eben so $CL^2 = CM^2 + CN^2 = AF^2 + BG^2$, mithin $CD^2 + CL^2 = CF^2 + CG^2 + AF^2 + BG^2 = AC^2 + BC^2$, mithin sind auch die Quadrate der Durchmesser gleich den Quadraten der Axe.

7. Zus. Die 2 gleichen Durchmessern einer Ellipse zugeordnete Durchmesser sind mithin ebenfalls gleich.

Satz 22. (Simsons 20. S.) Fig. 24.

Wenn man durch die Scheitel zweyer zugeordneter Durchmesser AC, BC einer Ellipse gerade Berührungslinien OV, OY, YX, XV, und eben so durch die Scheitel irgend zwey anderer zugeordneter Durchmesser CD, CL gerade Berührungslinien PT, PR, RS, ST an die Ellipse zieht; so ist das Parallelogramm OVXY, das die 4 erste einschließen, gleich dem Parallelogramm PRST, das die 4 letzten einschliessen.

Denn 1.) die Figuren OVXY, PRST sind Parallelogramme (11ter Satz, 6ter Zus.) 2.) Man ziehe an den Durchmesser CD die Linien AF, BG mit CL parallel, und an CL die Linien AM, BN mit CD parallel, und AO, BO begegnen der Linie CD in H, K. Endlich ziehe man BH, und ergänze das Parallelogramm HCNQ. Weil nun AH die Ellipse berührt, und AF eine Ordinate des Durchmessers CD ist; so ist $CH : CD = CD : CF$,

aber (21. Satz, 2. Zus.) CD : CL = CF : BG, folglich gleichförmig CH : CL = CD : BG = CD : HQ. Es sind aber auch die Winkel DCL, CHQ als Wechselswinkel gleich; mithin ist das Parallelogramm DL = dem Parallelogramm NH (14, VI. E.). Aber das Parallelogramm NH ist das Doppelte des Dreyecks, CBH, das auf gleicher Grundlinie CH, und zwischen einerley Parallelen mit ihm ist; eben so ist aber auch das Parallelogramm ACBO das Doppelte des nemlichen Dreyecks CBH: folglich ist das Parallelogramm ACBO = dem Parallelogramm NH = dem Parallelogramm DL, mithin sind auch ihre Vierfache, nemlich das Parallelgramm OVXY, PRST gleich.

(Zus. Namentlich ist das Parallelogramm, das die Berührungslinien an den Endpunkten von irgend 2 zugeordneten Durchmessern bilden, gleich dem Rechteck der beyden Axen: oder, wenn man aus dem Endpunkt eines Durchmessers ein Perpendikel auf seinen zugeordneten Durchmesser fällt, so ist das Rechteck zwischen der Hälfte dieses letzten Durchmessers und dem auf ihn gefällten Perpendikel gleich dem Rechteck der beyden halben Axen der Ellipse.)

Satz 23. (Simsons 21. S.) Fig. 24.

Wenn eine gerade Berührungslinie der Ellipse HZ zwey zugeordneten Durchmessern CD, CL in H, Z begegnet; so ist das Rechteck HAZ ihrer Stücke zwischen dem Berührungspunkt und den Durchmessern gleich dem Quadrat des Durchmessers CB, der dem durch den Berührungspunkt gehenden CA zugeordnet ist.

Man ziehe AF, BG parallel mit dem Durchmesser CL, und weil HF : FC = HA : AZ, so sind die Rechtecke HFC, HAZ ähnlich: es ist aber HF : HA = CG : CB. Weil nun die Rechtecke HFC, HAZ ähnlich sind, bey welchen HF, HA ähnlich liegende Seiten sind, und auch die Quadrate über CG, CB ähnliche Figuren sind; so ist (22, VI. E.) $HF \times FC : HA \times AZ = CG^2 : CB^2$. Aber $HF \times FC = EF \times FD$ (19ter Satz, 1. Zus.) $= CG^2$ (21. Satz), mithin ist auch $HA \times AZ = CB^2$.

Zus. (Sims. 3.) Umgekehrt sieht man leicht, wenn HAZ die Ellipse berührt, und 2 Durchmessern CH, CZ begegnet, und das Rechteck $HA \times AZ = CB^2$ ist, wo CB der CA zugeordnete Durchmesser ist, daß dann CH, CZ zugeordnete Durchmesser sind.

Satz 24. (Simsons 22. S.) Fig. 25.

Wenn man aus einem Punkte der Ellipse F an einen Durchmesser AB eine halbe Ordinate FG zieht; so verhält sich das Rechteck AGB zwischen den Abscissen des Durchmessers zu dem Quadrat der halben Ordinate FG, wie der Durchmesser AB zu seinem Parameter.

Es seye BH dieser Parameter, und DE der AB zugeordnete Durchmesser. Weil nun $AB : DE = DE : BH$; so ist $AB : BH = AB^2 : DE^2$ (20, VI. Zus.) $= AG \times GB : FG^2$ (17ter Satz).

Satz 25. (Simsons 23. S.) Fig. 25.

Wenn man aus einem Punkt F einer Ellipse eine halbe Ordinate FG an einen Durchmesser AB, und aus einem Scheitel des Durchmessers eine Linie BH gleich dem Parameter des Durchmessers senkrecht darauf errichtet; so ist das Quadrat der halben Ordinate FG gleich dem Rechteck, das auf einem Stück des Parameters sich beschreiben läßt, und zur Höhe die Abscisse BG hat, und dessen Ergänzung auf dem übrigen Theil des Parameters ein dem zwischen dem Durchmesser und seinem Parameter enthaltenen ähnliches und ähnlich liegendes Rechteck ist. (Mit andern Worten: das Quadrat der halben Ordinate FG ist kleiner als das Rechteck zwischen der Abscisse BG und dem Parameter BH um ein Recht.ck, dessen eine Seite eben die Abscisse BG, die andere die vierte Proportionallinie zu dem Durchmesser, seinem Parameter und der Abscisse BG ist.)

Denn man ziehe AH, und aus G die Linie GK parallel mit BH. Es begegne GK der Linie AH in K, und man ergänze die Parallelogramme KLHM, ABHN. Weil nun $AG \times GB : FG^2 = AB : BH$ (24. Satz) $= AG : GK = AG \times GB : KG \times GB$; so

ist $FG^2 = KG \times GB$. Aber $KG \times GB$ ist auf einem Stück BL des Parameters beschrieben, hat zur Höhe BG, und seine Ergänzung KLHM auf dem übrigen Theil des Parameters ist ein dem Rechteck ABHN zwischen dem Durchmesser AB und seinem Parameter ähnliches und ähnlich liegendes Rechteck. (Oder $FG^2 = BG \times BH - BG \times HL$, d. i. weil $AB : BH = BG : HL$; $FG^2 = BG \times BH - BG. \frac{BG.BH.}{AB}$

Von dieser Eigenschaft hat Apollonius die Linie **Ellipse** benannt.

Zus. (Simf. 3.) Es erhellet leicht, wenn man aus dem Scheitel des Durchmessers eine Linie BO unter irgend einem beliebigen Winkel gleich dem Parameter dieses Durchmessers, alsdann die Linie AO, und an AO von G eine Linie GP parallel mit BO zieht, daß dann $FG^2 = BG \times GP$ seye.

Satz 26. (Simsons 24. S.) Fig. 26.

Wenn sich 2 gerade der Lage und Größe nach gegebene Linien AB, DE in C unter einem rechten Winkel halbiren, eine Ellipse beschreiben, die diese Linien zu Axen habe.

Diß erhellet von selbst, indem man die Brennpunkte bestimmt nach 1. Satz 8. Zus. und dann nach der 1sten Erklärung verfährt.

Satz 27. (Simsons 25. S.) Fig. 26.

Es ist ein Punkt K, und ein gerade Linie AB, die nicht durch K geht, der Lage und Größe nach gegeben: eine Ellipse zu beschreiben, deren eine Axe AB seye; vorausgesetzt, daß ein von K auf AB gefälltes Perpendikel diese Linie selbst treffe.

Man fälle das Perpendikel KL, und mache dann $KL^2 : AL \times LB = AB^2 : DE^2$. Nun beschreibe man (26. Satz) eine Ellipse, deren Axen die sich in C unter einem rechten Winkel halbirende Linien AB, DE seyen; so geht diese (17ter Satz, 2. Zus.) durch K.

Bemerk. Wäre $AL \times LB = KL^2$; so gienge die Ellipse in einen Kreis über (I. B. 26. Satz).

Satz 28. (Simsons 26. S.) Fig. 27.

Von einer der Lage nach gegebenen Ellipse einen Durchmesser, den Mittelpunkt, die Axen und die Brennpunkte zu finden.

Man ziehe irgend 2 gerade von der Ellipse begränzte Parallellinien; so ist die sie halbirende Linie ein Durchmesser (15ter Satz, 4. Zus.) und der den Durchmesser halbirende Punkt C ist der Mittelpunkt (3ter Satz). Um die Axen zu finden, nehme man nun weiter auf der Ellipse irgend einen Punkt, z. B. A, ziehe CA, und beschreibe aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CA einen Kreis AF. Wenn dieser nun ganz ausserhalb der Ellipse fällt, so ist CA der gröste halbe Durchmesser, folglich die große Axe (10ter Satz). Nimmt man hingegen den Punkt D, und fällt der aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CD beschriebene Kreis ganz innerhalb der Ellipse, so ist CD der kleinste halbe Durchmesser, folglich die kleine Axe (10. Satz). Nimmt man endlich einen andern Punkt G, so daß der aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CG beschriebene Kreis weder ganz ausserhalb noch ganz innerhalb der Ellipse fällt, so ist CG weder die halbe große noch die halbe kleine Axe, mithin muß der Kreis der Ellipse nothwendig wieder begegnen. Er begegne ihr in H, man ziehe GH, und halbire sie in K. Wenn man CK zieht; so ist diß die eine Axe, und ein in C darauf errichtetes Perpendikel ist die andere. Denn weil GH durch den Durchmesser CK halbirt ist, so ist GH parallel mit der Berührungslinie AL, die durch seinen Scheitel geht. Da nun CKG ein rechter Winkel ist, so ist es auch CAL, mithin ist CKA eine Axe (11ter Satz, 4. Zus.). Und nun findet man die Brennpunkte wie im 26sten Satz.

Satz 29. (Simsons 27. S.) Fig. 28.

Wenn irgend 2 zugeordnete Durchmesser AB, CD einer Ellipse der Größe und Lage nach gegeben sind, ihre Axen zu finden, und sie zu beschreiben.

Analyse.

Es seye E der Mittelpunkt, in dem AB, CD sich schneiden. Man sich die Sache geschehen, und es seyen HK, FG die zu findenden Axen. Man ziehe durch A eine Linie AL parallel mit CD; so berührt diese die Ellipse in A (16. Satz, 3. Zus.) und ist der Lage nach gegeben (31. Dat.). Es begegnen ihr nun die Axen in L, M; so ist LA × AM = CE^2 (23. Satz), nun ist CE, mithin CE^2 folglich LA × AM gegeben. Es seye das Rechteck EA × AN = LA × AM, so ist auch EA × AN gegeben, mithin, da EA der Lage und Größe nach gegeben ist, so ist AN (61. Dat.) der Lage und Größe nach gegeben, und weil EA × AN = LA × AM, so liegen die Punkte L, E, M, N in einem Kreise (umgek. Satz von 35, III.). Wenn man daher EN in O halbirt, so liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf dem in O auf EN errichteten Perpendikel OP (Zus. zu 1, III. E.) Eben dieser Mittelpunkt liegt aber auch, weil LEM ein rechter Winkel ist, auf der Linie LM (Zus. zu 5, IV. E.), mithin auf dem Durchschnitt von OP, LM, folglich ist er gegeben (28. D.) Aber auch der Punkt E ist gegeben, mithin die gerade Linie PE (29. D.), folglich ist der aus dem Mittelpunkt P mit dem Halbmesser PE beschriebene Kreis der Lage und Größe nach gegeben (7. Erkl. D.) mithin auch die Punkte L, M, in welchen sein Umkreis der der Lage nach gegebenen Linie AM begegnet (28. D.) Man ziehe AQ senkrecht auf die Axe FG. Weil nun AL die Ellipse berührt, so ist EQ : EF = EF : EL (19. Satz), aber EQ, EL sind gegeben (29. D.) mithin ist EF der Größe nach gegeben. Eben so wird bewiesen, daß EK der Größe nach gegeben seye; folglich sind die Axen FG, HK der Lage und Größe nach gegeben. Und die Ellipse, die nach 27stem Satz so beschrieben wird, daß sie FG zu einer Axe hat, und durch den Punkt A geht, ist eben die, deren zugeordnete Durchmesser AB, CD sind.

Komposition.

Man verlängere EA bis N, so daß EA × AN = CE^2, halbire EN in O, und errichte in O auf EN das Perpendikel OP,

das der durch A mit CE gezogenen Parallele AL in P begegne. Aus dem Mittelpunkt P mit dem Halbmesser PE beschreibe man einen Kreis, dessen Umkreis der Linie AP in L, M begege, und und ziehe EL, EM. Endlich fälle man AQ senkrecht auf EL, und suche zwischen EQ, EL die mittlere Proportionallinie EF (13. VI. E.) mache EG = EF, und beschreibe nun (27. Satz) eine Ellipse, deren eine Axe FG seye, und die durch den Punkt A gehe; so werden AB, CD zugeordnete Durchmesser dieser Ellipse seyn. Denn, weil AQ senkrecht ist auf die Axe FG, und EQ : EF = EF : EL, so berührt AL die Ellipse in A (20. Satz). Und weil CD parallel ist mit der Berührungslinie AL; so hat CD einerley Lage mit dem AB zugeordneten Durchmesser. Ferner, weil der Winkel LEM im Halbkreis ein rechter ist; so ist EM die FG zugeordnete Axe, und das Rechteck LA × AM ist gleich dem Quadrat des AE zugeordneten halben Durchmessers (23. Satz). Aber wegen des Kreises ist auch LA × AM = EA × AN = CE^2, mithin ist CE der AE zugeordnete halbe Durchmesser, die Ellipse geht folglich durch C, und weil ED = EC, und EB = EA, geht sie auch durch die Punkte D, B. Mithin sind AB, CD zugeordnete Durchmesser in der Ellipse.

Zus. Wenn ein Durchmesser AB, der ihm zugehörige Ordinatenwinkel, und ein Punkt R ausserhalb AB jedoch so gegeben ist, daß eine von R unter dem gegebenen Ordinatenwinkel an AB gezogene Linie auf AB selbst trift; so läßt sich wie im 27sten Satz der AB zugeordnete Durchmesser CD finden, mithin nach dem gegenwärtigen Satz die Ellipse beschreiben.

Satz 30. (Simsons 28. S.)

Wenn ein Durchmesser AB der Lage und Größe nach, und eine darauf aus einem gegebenen Punkt R gezogene Ordinate RS der Lage nach gegeben ist, die Ellipse zu beschreiben.

Diese Aufgabe ist, wie man leicht sieht, ganz einerley mit dem Zusatz des vorigen Satzes, oder wenn der Ordinatenwinkel RSB ein rechter ist, mit dem 27. Satz.

11te Erklär. Fig. 29.

Ein Cylinder ist von zwey gleichen und parallelen Kreisen, den Grundflächen (deren Mittelpunkte eine gerade Linie, die Axe AB verbindet), und von einer krummen Seitenfläche eingeschlossen, welche um die Umkreise der beyden Grundflächen so geht, daß jede durch einen beliebigen Punkt im Umkreise mit der Axe parallel gezogene Linie CD (jede Seite des Cylinders) ganz in diese krumme Seitenfläche fällt.

Zus. Jeder Schnitt CDEF durch die Axe des Cylinders AB ist ein Parallelogramm, und, wenn der Cylinder gerade ist, d. h. wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, ein Rechteck.

Satz 31. Fig. 29.

Wenn ein Cylinder CDEF von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene GKH geschnitten wird; so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Cylinder ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Axe AJB liegt.

Denn, weil jede Seite des Cylinders, wie GD parallel ist mit der Axe JB (11te Erkl.); so schneidet eine Ebene durch GD, JB den Durchschnitt GKH und die Grundfläche in den Parallellinien GJ, DB (16, XI. E.), oder es ist GDJB ein Parallelogramm, mithin GJ = DB (34, I. E.). Eben so beweißt man für jeden andern Punkt K oder H, daß JK = BL, und JH = BF. Da nun DB = BL = BF (11te Erkl.); so ist auch GJ = KJ = HJ, mithin GKH ein Kreis, dessen Mittelpunkt J ist.

Satz 32. Fig. 29.

Wenn ein schiefstehender Cylinder CDEF (dessen Axe nicht senkrecht ist auf der Grundfläche) von einer Ebene CDEF, die durch die Axe AB geht, und auf der Grundfläche DLF senkrecht steht, und dann wieder von einer auf der Ebene CDEF senkrechten Ebene MPN so geschnitten wird, daß MN, die gemeinschaftliche Durchschnittslinie dieser letzten Ebene und jener ersten, mit den Seiten des durch den ersten Schnitt gebildeten Parallelogramms (11te Erkl. Zus.) Winkel CMN, ENM macht, die gleich sind den Winkeln, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt des ersten

Schnitts und der Grundfläche mit den Seiten eben dieses Parallelogramms macht, jedoch verwechselt liegen, so nemlich, daß CMN = EFD, und ENM = CDF; so ist der Durchschnitt der 2ten Ebene MPN mit dem Cylinder (den man Wechselschnitt, antiparallelen Schnitt, sectio subcontraria nennt) ein Kreis.

Denn man schneide den Cylinder durch eine dritte Ebene GPH, die parallel seye mit der Grundfläche, und durch irgend einen Punkt P des Schnitts MPN gehe. Da nun die Ebene GPH parallel ist mit der Grundfläche DLF, mithin wie diese senkrecht steht auf dem Parallelogramm CDEF, und da eben so MPN senkrecht ist auf der Ebene CDEF; so ist POQ die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Ebenen GPH, MPN senkrecht auf der Ebene CDEF (19, XI. E.), mithin auf den geraden Linien GO, MO, die in der Ebene CDEF durch O gehen (3 Erkl. XI. E.). Und da ferner der Schnitt GPH ein Kreis ist, der GH zum Durchmesser hat (31ster Satz); so ist die Sehne PQ in O halbirt (3, III. E.), und $QO^2 = PO^2 = GO \times OH$ (35, III. E.). Da nun der Winkel OMG = CDF = OGM, und ONE = CDF = OHN, mithin OM = OG, und ON = OH, folglich $MO \times ON = GO \times OH = PO^2$; so ist (27. Satz des Isten Buchs) MPN ein Kreis.

Satz 33. (Simsons 29. S.) Fig. 30.

Wenn ein Kegel, dessen Scheitel A, und Grundfläche BC ist, von einer Ebene ABC durch die Axe, und von einer andern Ebene DEF geschnitten wird, die beyden Seiten des durch den Schnitt durch die Axe entstandenen Dreyecks begegnet, und weder parallel noch antiparallel gegen die Grundfläche des Kegels liegt; und wenn der Durchschnitt dieser 2ten schneidenden Ebene und der Grundfläche des Kegels eine Linie GH ist, die auf BC der Grundlinie des Dreyecks durch die Axe oder auf ihrer Verlängerung senkrecht steht: so ist der Durchschnitt DEF dieser 2ten Ebene mit der Kegeloberfläche eine Ellipse, von welcher die Linie DF, die der Durchschnitt ist der Linie DEF und des Dreyecks durch die Axe, ein Durchmesser ist.

Man nehme auf dem Schnitt DEF irgend einen Punkt E, und ziehe durch denselben an DF die Linie EK parallel mit HG, durch K aber eine Linie LM parallel mit BC; so ist die Ebene durch EK, LM mit der durch BC, GH d. h. mit der Grundfläche des Kegels parallel (15, XI. E.), mithin ist der Schnitt durch EK, LM ein Kreis, dessen Durchmesser LM ist (24. Satz unsers Isten Buchs). Es ist aber (10, XI. E.) EK senkrecht auf LM, weil GH senkrecht ist auf BG, mithin ist (5, III. E.) $LK \times KM = EK^2$. Eben so, wenn man in dem Schnitt DEF irgend einen andern Punkt N nimmt, und NO mit EK oder HG parallel an DF, und durch O die Linie PQ parallel mit BC zieht, ist $PO \times OQ = NO^2$. Mithin ist $EK^2 : NO^2 = LK \times KM : PO \times OQ$. Es ist aber $LK : PO = DK : DO$ und

$KM : OQ = KF : OF$, mithin

$LK \times KM : PO \times OQ = DK \times KF : DO \times OF$, folglich auch $EK_2 : NO^2 = DK \times KF : DO \times OF$. Man beschreibe nun (30. Satz) eine Ellipse, in welcher DF ein Durchmesser, und EK eine Ordinate dieses Durchmessers seye; so liegt, weil nach der Verzeichnung der Punkt E auf der Ellipse ist, auch der Punkt N darauf. Und eben so wird gezeigt, daß alle Punkte des Schnitts DEF auf derselben liegen.

(Daß übrigens unter den vorausgesetzten Bedingungen diese Ellipse nicht in einen Kreis übergehen könne, erhellet so. Wenn diß möglich seyn sollte; so müßte DF eine Axe, mithin EK senkrecht auf DF, und zugleich $EK^2 = DK \times KF$ (35, III. E.) folglich $LK \times KM = DK \times KF$ seyn. Es ist aber, wenn, wie vorausgesetzt wird, DF der Linie BC in G begegnet,

$LK : DK = BG : DG$, und

$KM : KF = GC : GF$, mithin

$LK \times KM : DK \times KF = BG \times GC : DG \times GF$, folglich müßte auch $BG \times GC = DG \times GF$ seyn, mithin müßte $BG : DG = GF : GC$ seyn (16, VI. E.), folglich müßte (6, VI. E.) der

Winkel GFC oder DCA = DBG seyn, mithin DF eine antiparallele Linie von BC seyn, gegen die Voraussetzung.)

1. Zus. Man ziehe durch D, F die Linien DR, FS mit AC, AB parallel; so ist $BG : DG = BS : DF$

und $\underline{CG : GF = CR : DF}$

mithin $BG \times CG : DG \times GF = BS \times CR : DF^2$, folglich

$\left.\begin{matrix} LK \times KM \\ EK^2 \end{matrix}\right\} : DK \times KF = BS \times CR : DF^2$. Aber es ist auch (17. Satz), wenn Z der DF zugeordnete Durchmesser heißt: $EK^2 : DK \times KF = Z^2 : DF^2$, mithin ist $Z^2 = BS \times CR$. Da nun

$BS : BC = AF : AC$, und

$\underline{CR : BC = AD : AB}$; so ist

$BS \times CR : BC^2 = AF.\ AD : AC.\ AB$, folglich auch

$Z^2 : BC^2 = AF.\ AD : AC.\ AB.$

2. Zus. Fällt man aus F und C Perpendikel auf AB; so findet man aus 12, II. und 13, II. E.

a) Wenn A ein spitziger Winkel ist:

$AF^2 + AD^2 - DF^2 : AB^2 + AC^2 - BC^2 = AF \times AD : AB.AC.$

b) Wenn A ein stumpfer Winkel ist:

$DF^2 - (AF^2 + AD^2) : BC^2 - (AB^2 + AC^2) = AF.AD.AB.AC.$

Ist hingegen c) A ein rechter Winkel; so ist $DF^2 = AF^2 + AD^2$, so wie $BC^2 = AB^2 + AC^2$, woraus sich in allen Fällen DF aus eben den Linien AB, AC, BC, AD, AF wie nach dem vorigen Zus. der DF zugeordnete Durchmesser, bestimmen läßt.

3. Zus. Wenn der Kegel geradstehend, oder wenn in einem schiefstehenden Kegel der Schnitt ABC durch die Axe senkrecht ist auf der Grundfläche des Kegels; so ist die gerade Linie HG, die nach der Vorauss. in der Grundfläche auf BG den Durchschnitt der Grundfläche mit ABC senkrecht gezogen worden ist, auch senkrecht auf ABC (4. Erkl. XI. E.) mithin senkrecht auf DG. Folglich ist eben so jede Ordinate EK ebenfalls senkrecht auf DF, mithin ist der Durchmesser DF eine Axe der Ellipse, und ihre zugeordnete Axe ist (1. Zus.) die mittlere Proportionallinie zwischen

BS und CR, oder diese zugeordnete Axe verhält sich zu BC wie die mittlere Proportionallinie zwischen AF und AD zu der mittlern Proportionallinie zwischen AC und AB, oder wenn der Kegel geradstehend ist, wie die mittlere Proportionallinie zwischen AF und AD zu der Seite des Kegels AC oder AB.

Satz 34. Fig. 31.

Wenn ein Cylinder, dessen Grundfläche BC ist, von einer Ebene ABCS, die durch die Axe geht, und von einer andern Ebene DEF geschnitten wird, welche beyden Seiten AB, CS des Parallelogramms durch die Axen begegnet, und weder parallel noch antiparallel gegen die Grundfläche des Cylinders liegt, und wenn der Durchschnitt dieser zweiten schneidenden Linie und des Cylinders eine Linie GH ist, die auf BC der Grundlinie des Parallelogramms durch die Axe oder auf ihrer Verlängerung senkrecht steht; so ist der Durchschnitt DEF dieser 2ten Ebene mit der Cylinder-Oberfläche eine Ellipse, von welcher die Linie DF, der Durchschnitt nemlich der Linie DEF und des Parallelogramms durch die Axe, ein Durchmesser ist.

Der Beweis ist wörtlich der nemliche, wie bey dem vorhergehenden Satz, ausgenommen, daß statt des 24sten Satzes des Isten Buchs der 31ste unsers IIten Buchs dazu gebraucht wird.

1. Zus. Da auch hier $EK^2 = LK \times KM$, und
$LK : DK = BG : DG = BC : DF$, und
$KM : KF = GC : GF = BC : DF$; so ist

$\left.\begin{matrix} LK \times KM \\ EK^2 \end{matrix}\right\} : DK \times KF = BC^2 : DF^2$. Aber wenn Z der DF zugeordnete Durchmesser heißt; so ist auch (17. Satz) $EK^2 : DK \times KF = Z^2 : DF^2$, folglich ist dieser zugeordnete Durchmesser immer $= BC$.

2. Zus. Die leichteste Bestimmung von DF giebt die Trigonometrie vermittelst der Winkel bey B und D.

3. Zus. Es wird eben so, wie in dem 3ten Zus. des vorigen Satzes bewiesen, daß, wenn der Cylinder geradstehend, oder wenn in einem schiefstehenden Cylinder der Schnitt ABCS senk-

recht.

recht auf der Grundfläche des Cylinders ist, alsdann DF die Axe der Ellipse, mithin (1. Zus.) ihre zugeordnete Axe = BC seyn werde.

Satz 35. Fig. 32.

Wenn man 1) auf der Axe einer Ellipse von einem ihrer Scheitel A aus eine Linie AE gleich dem Parameter dieser Axe nimmt, und über derselben als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so fällt dieser ganz innerhalb der Ellipse, wenn A ein Scheitel ihrer großen Axe, hingegen ganz ausserhalb der Ellipse, wenn A ein Scheitel ihrer kleinen Axe ist. Nimmt man hingegen 2) auf der großen Axe ein Stück AG, das größer ist, als ihr Parameter AE, aber kleiner als die Axe AB selbst, und auf der kleinen Axe ein Stück AG, das kleiner ist, als ihr Parameter AE, aber größer als die Axe AB selbst, und beschreibt über AG einen Kreis; so begegnet dieser der Ellipse in 2 Punkten, und sein Bogen, der durch A geht, fällt ausserhalb der Ellipse, wenn A der Scheitel der großen Axe, hingegen innerhalb der Ellipse, wenn A der Scheitel der kleinen Axe ist.

1) Man nehme, auf der durch den Scheitel A einer Axe der Ellipse gezogenen Berührungslinie, AH = AE, ziehe die Linien EH, BH, und errichte aus irgend einem Punkt P des Durchmessers AE eine Linie senkrecht auf der Axe, die mithin (11. Satz) parallel mit der Tangente AH seyn wird, und es begegne diese Linie der Ellipse in M, dem Kreis in N, den geraden Linien EH, BH in R, S; so ist $NP^2 = AP \times PE$ (35, III. E.) $= AP \times PR$: aber $MP^2 :$ $AP \times PB = \left.\begin{matrix}AH\\AE\end{matrix}\right\} : AB$ (8. Satz, 3. Zus.) $= PS : PB = AP \times PS :$ $AP \times PB$, mithin ist $MP^2 = AP \times PS$. Ist nun a) A der Scheitel der großen Axe; so ist, weil der Parameter der großen Axe immer kleiner ist, als diese Axe selbst, $PR < PS$, mithin $NP < MP$, folglich fallen alsdann alle Punkte N des über AE beschriebenen Kreises innerhalb der Ellipse. Ist hingegen b) A der Scheitel der kleinen Axe; so ist, weil der Parameter der kleinen Axe immer größer ist, als diese Axe selbst, $PR > PS$, mit-

Bayerische Staatsbibl München

hin NP > MP, folglich fallen alsdann alle Punkte N des über AE beschriebenen Kreises ausserhalb der Ellipse.

2) Man nehme wieder, auf der durch den Scheitel A der Ellipse gezogenen Berührungslinie, AH gleich dem Parameter AE, und AJ = AG dem Durchmesser des Kreises, und ziehe die die Linien BH, GJ, die einander in K begegnen. Durch K ziehe man eine Linie KD, senkrecht auf die Axe, oder parallel mit der Tangente AH; diese Linie begegne dem Kreis in L. Weil nun DK = DG (indem AJ : AG = DK : DG, und AJ = AG (Verzeichn.)) mithin AD × DG = AD × DK, folglich auch DL^2 = AD × DG (35, III. E.) = AD × DK, aber $\left.\begin{matrix}DK\\AD.DK\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}DB\\AD.DB\end{matrix}\right.$ = AH : AB; so ist auch DL^2 : AD × DB = AH : AB, mithin die Punkte L zugleich in der Ellipse (8. Satz, 3. Zus.) Zieht man dann durch irgend einen Punkt p der Axe zwischen A und D eine Parallele mit AH, die der Ellipse in m, dem Kreise in n, der Linie GJ in r, und der Linie BH in s begegne; so ist wie bey Nr. 1. np^2 = Ap × pG = Ap × pr, und pm^2 = Ap × ps. Ist nun a) A der Scheitel der großen Axe, mithin (Verzeichn.) AG < AB; so ist pr > ps, folglich np > mp, mithin fallen die Punkte n des Bogen LAL alsdann ausserhalb der Ellipse. Ist hingegen b) A der Scheitel der kleinen Axe, so fallen aus ähnlichen Gründen die Punkte n des Kreisbogens LAL innerhalb der Ellipse.

1. Zus. Der Krümmungskreis einer Ellipse im Scheitel einer ihrer Axen ist der, der über einem auf dieser Axe dem Parameter derselben gleich gemachten Durchmesser beschrieben wird; oder: kein anderer Kreis, der in diesem Scheitel die Tangente der Ellipse berührt, kann zwischen dem eben erwähnten Kreis und der Ellipse durchgehen. Denn 1) wenn A ein Scheitel der großen Axe ist, und mithin (35. Satz nr. 1.) der erwähnte über dem Parameter AE als Durchmesser beschriebene Kreis ganz innerhalb der Ellipse liegt; so fallen

a) alle über einem kleinern auf AB genommenen Durchmesser beschriebene Kreise innerhalb des vorigen;

b) alle über Durchmessern, wie AG, die > AE, aber < AB sind, beschriebene Kreise schneiden die Ellipse, so daß ihre durch A gehende Bogen LAL ausserhalb der Ellipse liegen (35. Satz nr. 2.)

c) ein über dem Durchmesser AB, folglich noch vielmehr alle über noch größern Durchmessern beschriebene Kreise fallen ganz ausserhalb der Ellipse (10. Satz, Zus.).

2) Wenn A ein Scheitel der kleinen Axe ist, und mithin (35. Satz nr. 1.) der über dem Parameter AE als Durchmesser beschriebene Kreis ganz ausserhalb der Ellipse liegt; so fallen

a) alle über einem größern auf der Verlängerung von AB genommenen Durchmesser beschriebene Kreise ausserhalb des vorigen;

b) alle über Durchmessern wie AG, die < AE, aber > AB sind, beschriebene Kreise schneiden die Ellipse, so daß ihre durch A gehende Bogen LAL innerhalb der Ellipse liegen (35. Satz nr. 2.)

c) ein über dem Durchmesser AB, folglich noch vielmehr alle über noch kleinern Durchmessern beschriebene Kreise fallen ganz innerhalb der Ellipse (10. Satz, Zus.)

2. Zus. Der Krümmungshalbmesser der Ellipse in jedem Scheitel einer Axe ist gleich dem halben Parameter dieser Axe.

3. Zus. Die Krümmung einer Ellipse in den Scheiteln ihrer kleinen Axe ist kleiner als ihre Krümmung in den Scheiteln ihrer großen Axe. Diese Krümmungen sind nemlich, bey gleichen unendlich kleinen Bogen, umgekehrt proportional den Krümmungshalbmessern, mithin (2. Zus.) den Parametern der Axe, oder sie stehen im geraden Verhältniß der Würfel der Axen. Denn es seye die große Axe = A, ihr Parameter = P, die kleine Axe = a, ihr Parameter = p; so ist

$P : a = a : A$ (9. Erkl.)

mithin $P : A = a^2 : A^2$ (20, VI. E.)

und $A : p = a : A$ (9. Erkl.)

folglich $P : p = a^3 : A^3$

mithin die Krümmung an dem Scheitel der kleinen Axe zu der Krümmung an dem Scheitel der großen Axe, wie der Würfel der kleinen Axe zum Würfel der großen.

Satz 36. Fig. 33—39.

1) Wenn durch einen Scheitel D irgend eines Durchmessers DJ einer Ellipse, der keine ihrer Axen ist, eine Berührungslinie DT gezogen wird, und wenn man durch eben diesen Punkt einen Kreis beschreibt, der die Linie DT in D berührt; so wird dieser Kreis, wenn er von dem Durchmesser DJ ein Stück DE abschneidet, das dem Parameter des Durchmessers gleich ist, der Ellipse nur noch in einem einzigen andern Punkt L begegnen, und die beyde Stücke des Kreises zwischen D und L werden das eine ganz ausserhalb, das andere ganz innerhalb der Ellipse fallen. 2) Schneidet aber der Kreis von dem Durchmesser DJ ein Stück ab, das größer ist, als der Parameter desselben, so fällt er von beyden Seiten von D ausserhalb der Ellipse; hingegen 3) von beyden von D innerhalb der Ellipse, wenn er ein Stück abschneidet, das kleiner ist, als der Parameter.

I.) Weil Fig. 33. der über Dd beschriebene Kreis die Linie Tt in D berührt; so ist er senkrecht darauf, mithin ist jede Sehne der Ellipse, die auf Dd senkrecht ist, parallel mit Tt, folglich eine Ordinate des Durchmessers DJ (16. Satz). Man mache nun auf der Seite von D, nach welcher die große Axe liegt, DT = DE, ziehe die Linien ET, JT, (von dem Fall, wenn E, J zusammenfallen, s. die Bemerkung am Ende des Satzes). fälle aus E auf den Durchmesser Dd des Kreises das Perpendikel EK, das der Linie TJ in O begegne, nehme auf eben der Seite von E, auf welche der Punkt O fällt, ES so, daß 2EK : DE = EO : ES, und ziehe die Linie DS, die, wenn es nöthig ist, verlängert, dem Kreise wieder in L begegne; so wird

A) der Punkt L zugleich auf der Ellipse liegen. Denn man ziehe durch L eine Linie parallel mit EK, oder DT, mithin senkrecht auf Dd. Sie begegne dem Durchmesser des Kreises Dd in P, dem Durchmesser der Ellipse DJ in V, den geraden Linien TJ, TE in Q, H; so

ist, wenn $DE > DJ$ ist, der Winkel DVL stumpf, ist aber $DE < DI$; so ist DVL spitzig. Denn wenn $DE > DJ$, mithin, da $DE : DJ = TO : TJ$, auch $TO > TJ$; so fällt O auf die über E hinaus verlängerte Linie KE, d. h. auf die Seite von DE, auf welcher EK nicht liegt. Da aber der Winkel TDE immer stumpf ist (11. Satz, 4. Zus.); so fällt die senkrecht auf TD errichtete Linie DK auf eben dieselbe Seite von DE, auf welcher TD liegt, mithin liegt EO, folglich nach der Verzeichnung auch ES auf der Seite von DE, auf welcher TD nicht liegt, mithin ist der Winkel DES als Wechselswinkel von TDE stumpf, folglich auch der mit DES gleiche Winkel DVL. Ist hingegen $DE < DJ$, mithin $TO < TJ$, so fällt O auf eben die Seite von E, auf welcher K, d. h. auf die Seite, auf welcher DT liegt, mithin ist der Winkel DES folglich der ihm gleiche DVL spitzig. Im 1sten Fall, wenn $DE > DJ$, ist nun DV immer kleiner nicht nur als DE, sondern selbst als DJ, und der Punkt Q, liegt daher zwischen V und H. Denn man ziehe durch den Punkt J eine Linie mit EK, oder DT parallel, sie begegne dem Durchmesser des Kreises Dd in p, den Linien TE, DS in h, l, dem Kreise in m, n; so ist

$$hJ : hT = EO : ET$$
$$hT : DJ = ET : ED$$
$$\underline{DJ : Jl = DE : ES}$$

mithin $hJ : Jl = EO : ES = 2EK : DE = 2pJ : DJ$, folglich ist $hJ \times JD$, oder (weil $hJ = JE$, so wie $DT = DE$) $EJ \times JD = 2pJ \times Jl$. Aber wegen des Kreises ist auch $mJ \times Jn = EJ \times JD$, mithin $mJ \times Jn = 2pJ \times Jl$, folglich $mJ : 2pJ = Jl : Jn$. Da nun $mJ > 2Jp$; so ist auch $Jl > Jn$, mithin liegt der Punkt l ausserhalb des Kreises, folglich ist $Dl > DL$, mithin auch $DJ > DV$, weil $Dl : DL = DJ : DV$. Da nun die Linie TJ zwischen dem Punkt D und der Linie DE durchgeht; so liegt Q zwischen V und H. Im 2ten Fall, wenn $DE < DJ$ ist, liegt entweder der Punkt S auf dem Kreise oder ausserhalb oder innerhalb desselben.

Liegt a) S auf dem Kreise selbst; so fallen mithin die Punkte S, L; Q, O; P, K, endlich H, V, E zusammen, und es ist $\left.\begin{matrix}ES\\VL\end{matrix}\right\} = 2EK$, weil ES eine Sehne ist, mithin $\left.\begin{matrix}ES^2\\VL^2\end{matrix}\right\} = EO.DE = VQ \times DV$. Da nun $VQ : VJ = DT : DJ = DE : DJ$, mithin auch $\left.\begin{matrix}DV \times VQ\\VL^2\end{matrix}\right\} : DV \times VJ = DE : DJ$; so erhellet in diesem Fall sogleich, daß der Punkt L oder S auf der Ellipse liege (17. Satz, 2. Zus.). Liegt b) der Punkt S ausserhalb des Kreises: so ist, weil $DS : DL = DE : DV$, und $DS > DL$, auch $DE > DV$, mithin der Punkt V innerhalb des Kreises, und da die Linie TE zwischen dem Punkt D und der Linie DJ liegt; so liegt H zwischen V und Q. Liegt endlich c) Figg. 34. 35. S innerhalb des Kreises; so liegt V zwischen E und J. Denn, weil $DS : DL = DE : DV$, und $DS < DL$; so ist auch $DE < DV$. Man ziehe durch J die Linie Jp parallel mit der Tangente DT, mithin senkrecht auf den Durchmesser des Kreises Dd, dem sie in p, den Linien TE, DS aber in h, l begegne. Nun wird wieder wie bey Fall 1. bewiesen, daß $EJ \times JD = 2pJ \times Jl$ seye. Entweder liegt nun ferner Fig. 34. Jp ganz ausserhalb des Kreises, dann ist $Dp > DP$, mithin $DJ > DV$. Oder Jp berührt den Kreis in d, so daß die Punkte p und d zusammenfallen, dann ist $2pJ \times Jl = EJ \times JD = Jp^2$, mithin $2Jl = Jp$, mithin $Jl < Jp$, folglich fällt der Punkt l ausserhalb des Kreises, es ist mithin $Dl > DL$, daher auch $DJ > DV$. Oder Fig. 35. Jp schneidet den Kreis in 2 Punkten, von denen der von J entferntere m, der J nähere n heissen mag, mithin ist $mJ \times Jn = EJ \times JD = 2pJ \times Jl$, oder $mJ : 2pJ = Jl : Jn$, da nun $mJ < 2Jp$; so ist auch $Jl < Jn$, oder der Punkt l liegt ausserhalb des Kreises. Es ist mithin $Dl > DL$, folglich auch $DJ > DV$. In allen Fällen von Nr. c. liegt mithin V zwischen E und J. Und da die Linie VP nur erst der über E hinaus verlängerten Linie TE in H, hingegen der Linie TJ selbst in Q begegnet; so liegt V zwischen H und Q. In allen Fällen 1. 2. ist nun wegen der Parallelen

HL, ES, DT: $\quad HQ:HT = EO:ET$
$HT:DV = ET:ED$
$DV:LV = DE:ES$

folglich $HQ:LV = EO:ES = 2EK:DE = 2PV:DV$, mithin $2PV \times VL = DV \times HQ$. Setzt man in dem Fall 1. in welchem, wie wir gesehen haben, $DV < DE$ ist, und Q zwischen V und H liegt, beiderseits $DV \times VQ + DV^2$ hinzu; so ist $DV \times VQ + DV^2 + 2PV \times VL = DV \times VH + DV^2 = DV \times VE + DV^2$, (weil $VE = VH$, so wie $DT = DE$) $= ED \times DV$. Aber $DL^2 = Dd \times DP$ (8. und 17, VI. E.) $= ED \times DV$, weil $Dd:DE = DV:DP$ (31, III. und 4, VI. E.) mithin ist $DV \times VQ + DV^2 + 2PV \times VL = DL^2 = VL^2 + DV^2 + 2PV \times VL$ (12, II. E.) indem in diesem Fall, wie wir gesehen haben, das Dreyeck DVL bey V stumpfwinklicht ist. Folglich ist $DV \times VQ = VL^2$. Aber $VQ:VJ = DT:DJ = DE:DJ$, mithin auch
$\left.\begin{matrix} DV \times VQ \\ VL^2 \end{matrix}\right\} : DV \times VJ = DE : DJ$, folglich liegt der Punkt L auf der Ellipse (17. Satz, 2. Zus.).

Im 2ten Fall a. ist schon oben gezeigt worden, daß L auf der Ellipse liege. Im 2ten Fall b. in welchem, wie wir gesehen haben $DV < DE$ ist, und Q auf der verlängerten Linie VH liegt, ziehe man von $DV \times VQ + DV^2$, die gleiche Größen $2PV \times VL$ und $DV \times HQ$ ab; so ist $DV \times VQ + DV^2 - 2PV \times VL = DV \times VH + DV^2 = ED \times DV$. Da nun, wie vorhin, auch $DL^2 = ED \times DV$; so ist $DV \times VQ + DV^2 - 2PV \times VL = DL^2 = VL^2 + DV^2 - 2PV \times VL$ (13, II. E.), indem in diesem Fall das Dreyeck DVL bey V spitzwinklicht ist, folglich $DV \times VQ = VL^2$, mithin wie vorhin L auf der Ellipse.

Im 2ten Fall c. endlich, in welchem, wie wir gesehen haben, $DV > DE$ ist, und V zwischen H und Q liegt, ist, wie gezeigt worden, $2PV \times VL = DV \times HQ = DV \times VQ + DV \times VH = DV \times VQ + DV \times VE$. Es ist aber, wie vorhin, $DL^2 = ED \times DV$, mithin, gleiches hinzugesetzt, $DL^2 + 2PV \times VL = DV \times VQ + DV^2$ d. i. (13, II. E.) $DV^2 + VL^2 = DV \times VQ$

$+ DV^2$, mithin wieder $VL^2 = DV \times VQ$, folglich, wie vorhin, L auf der Ellipse.

B) Man ziehe nun durch irgend einen von D und L verschiedenen Punkt der Ellipse eine Parallele mit der Berührungslinie DT, die der Ellipse in M, N, dem Kreise in X, Y, dem Durchmesser der Ellipse DJ in R, dem des Kreises Dd in W, den geraden Linien DL, TE, TJ in q, U, Z begegne, und ziehe die Sehnen des Kreises DX, DY; so ist $ZU : TU = EO : ET$

$$TU : DR = ET : DE$$
$$DR : Rq = DE : ES$$

mithin $ZU : Rq = EO : ES = 2EK : DE = 2RW : DR$, folglich $2WR \times Rq = DR \times ZU = \begin{cases} DR \times RU - DR \times RZ \\ DR \times RZ - DR \times RU \end{cases}$, je nachdem U auf der Verlängerung von RZ oder auf RZ selbst liegt, oder $2WR \times RQ = \pm (DR \times RZ - DR \times RE)$ weil $RE = RU$ ist. Nun ist $DX^2 = DY^2 = Dd \times DW$ (8 und 16, VI. E.) $= ED \times DR$ (31, III. 4 und 16, VI. E.), folglich $\left.\begin{matrix} DX^2 \\ DY^2 \end{matrix}\right\} \pm 2WR \times Rq = ED \times DR + DR \times RZ - DR \times RE = DR^2 + DR \times RZ$, weil $ED - ER = DR$.

Aber $DX^2 = DR^2 + RX^2 - 2WR \times RX$ 13, II, E.)
und $DY^2 = DR^2 + RY^2 + 2WR \times RY$ (12, II. E.)
mithin $\left.\begin{matrix} DR^2 + RX^2 - 2WR \times RX \pm 2WR \times Rq \\ DR^2 + RY^2 + 2WR \times RY \pm 2WR \times Rq \end{matrix}\right\} = DR^2 + DR \times RZ$,
d. h. $\left.\begin{matrix} RX^2 - 2WR \times qX \\ RY^2 + 2WR \times qY \end{matrix}\right\} = DR \times RZ = \frac{DE}{DJ} DR \times RJ = \begin{cases} RM^2 \\ RN^2 \end{cases}$
weil $RX \mp Rq = qX$, $RY \pm Rq = qY$, und $DJ : \begin{cases} DE \\ DT \end{cases} = RJ : RZ = DR \times RJ : DR \times RZ$. Folglich ist $RX > RM$, aber $RY < RN$, mithin liegt jeder Punkt X des Bogens DXL außerhalb, jeder Punkt Y des Bogens DYL hingegen innerhalb der Ellipse.

II.) Der Kreis schneide Fig. 36. von dem Durchmesser DJ ein Stück DG ab, das größer ist, als der Parameter DE dieses Durchmessers. Begegnet der Kreis der Ellipse in keinem andern Punkt als D; so fällt er ganz außerhalb derselben, weil schon

der Kreis, der von dem Durchmesser DJ ein Stück gleich dem Parameter DE abschneidet, auf der einen Seite der Ellipse außerhalb derselben fällt, und der hier erwähnte Kreis noch außerhalb jenes Kreises liegt. Begegnet er aber der Ellipse wieder in einem Punkt *A*; so schneide man auf der Berührungslinie DH = DE, DT = DG ab, ziehe die Linien JH, GT, die einander in C begegnen (was immer geschehen muß, weil DT = DG aber DH nicht = DJ ist, ausgenommen, wenn DE = DJ wäre, wo dann auch *DH* = DJ würde. Von dieser Ausnahme s. unten in der Bemerk.), und durch C eine Linie CF parallel mit der Tangente DT, es begegne CF dem Durchmesser der Ellipse DJ in F, und man ziehe AF. Wenn nun AF den Kreis in A berührt; so fällt er wieder ganz ausserhalb der Ellipse. Begegnet aber AF dem Kreise noch in einem andern Punkte B; so liegt dieser gleichfalls in der Ellipse, und der Bogen ADB des Kreises fällt ausserhalb, der übrige Bogen AyB aber innerhalb der Ellipse.

Um diß zu beweisen, ziehe man durch die Punkte A, B, durch irgend einen Punkt Y des Bogens ADB, und durch irgend einen Punkt y des übrig bleibenden Bogens AyB im Kreise gerade Linien parallel mit der Tangente DT, die dem Durchmesser DJ der Ellipse in den Punkten L, K, R, r, dem Durchmesser Dd des Kreises in O, V, U, u, der geraden Linie JH in P, p, W, w, der Linie GT in Q, q, S, ſ begegnen. Außerdem begegnen die durch Y, y gezogene Linien dem Kreise wieder in X, x, der Ellipse in M, N und m, n, und der, wenn es nöthig ist, verlängerten Linie AB in Z, z. (Sollte die Linie YX der Ellipse gar nicht begegnen; so wäre eben damit schon bewiesen, daß die Punkte Y, X ausserhalb der Ellipse liegen. Die Linie yx hingegen muß nothwendig der Ellipse in 2 Punkten begegnen. Denn da die Linie AB von yx, die zwischen A, B durchgeht, in einem Punkte z geschnitten wird, AB aber innerhalb der Ellipse liegt, (1. S. 6. Zus.); so schneidet auch yx die Ellipse in 2 Punkten (1. Erkl.)). Weil nun $AL^2 = \frac{DE}{DJ} \times DL \times LJ$ (24. Satz)

$= DL \cdot LP$, indem $DJ : \begin{Bmatrix} DE \\ DH \end{Bmatrix} = LJ : LP = DL \cdot LJ : DL \cdot LP$; so ist $DL \cdot LP + DL^2 = AL^2 + DL^2 = DA^2 - 2AL \cdot LO$ (12, II. E.) $= Dd \cdot DO - 2AL \cdot LO$ (8 und 16, VI. E.) $= GD \cdot DL - 2AL \cdot LO$ (31, III. 4 und 16, VI. E.) $= DL^2 + DL \cdot LG - 2AL \cdot LO = DL^2 + DL \cdot LQ - 2AL \cdot LO$, indem $LG = LQ$, so wie $DG = DT$: folglich $DL \cdot LP = DL \cdot LQ - 2AL \cdot LO$, oder $2AL \cdot LO = DL \cdot LQ - DL \cdot LP = DL \cdot PQ$, mithin $PQ : AL = 2LO : DL$. Nun ist

$$PQ : CQ = pq : Cq = WS : CS = ws : Cs$$
$$CQ : FL = Cq : FK = CS : FR = Cs : Fr$$
$$FL : AL = FK : BK = FR : ZR = Fr : zr$$

---

folglich $PQ : AL = pq : BK = WS : ZR = ws : zr$

ferner $2LO : DL = 2KV : DK = 2RU : DR = 2ru : Dr$, mithin $pq : BK = 2KV : DK$, und $WS : ZR = 2RU : DR$, und $ws : zr = 2ru : Dr$. Folglich ist $2BK \cdot KV = DK \cdot pq = DK \cdot Kq \pm DK \cdot Kp = DK \cdot KG \pm DK \cdot Kp$, mithin, weil $DB^2 = Dd \cdot DV = KD \cdot DG$; so ist $DB^2 \pm 2BK \cdot KV = KD \cdot DG \pm KD \cdot KG + DK \cdot Kp = DK^2 + DK \cdot Kp$. Aber $DK^2 + BK^2 = DB^2 \pm 2BK \cdot KV$, mithin $DK^2 + BK^2 = DK^2 + DK \cdot Kp$, und $BK^2 = DK \cdot Kp = \frac{DE}{DJ} \cdot DK \cdot KJ$, mithin B in der Ellipse (24. Satz). Eben so ist $2ZR \cdot RU = DR \cdot WS = DR \cdot RS - DR \cdot RW = DR \cdot RG - DR \cdot RW$. Nun ist $\begin{Bmatrix} DX^2 \\ DY^2 \end{Bmatrix} = GD \cdot DR$, mithin $\begin{Bmatrix} DX \\ DY^2 \end{Bmatrix} - 2ZR \cdot RU = GD \cdot DR - DR \cdot RG + DR \cdot RW = DR^2 + DR \cdot RW$. Es ist aber $DX^2 = DR^2 + RX^2 - 2XR \cdot RU$ (13, II. E.) und $DY^2 = DR^2 + RY^2 + 2YR \cdot RU$ (12, II. E.), folglich $RX^2 - 2ZX \cdot RU = RY^2 - 2ZY \cdot RU = DR \cdot RW = \frac{DE}{DJ} \cdot DR \cdot RJ = \begin{Bmatrix} RM^2 \\ RN^2 \end{Bmatrix}$ (24. Satz), folglich sowohl $RX > RM$, als $RY > RN$, mithin sind die Punkte X, Y außerhalb der Ellipse. Eben so wird nun, wenn die Linie FA den Kreis nur berührt, gezeigt, daß

alle Punkte des Kreises, ausgenommen A, und D, ausserhalb der Ellipse liegen. Und auf ähnliche Art wird, weil 2zr × ru = Dr × wf, abgeleitet, daß rx > rm, und ry < rn, mithin x ausserhalb, y aber innerhalb der Ellipse liege, folglich ist der Kreisbogen ADB ausserhalb, der AyB aber innerhalb der Ellipse.

III. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn der Kreis ein Stück DG kleiner als der Parameter DE von dem Durchmesser DJ abschneidet, er ganz oder wenigstens von beyden Seiten von D innerhalb der Ellipse liege, nemlich, daß er im letzten Fall ihr außer dem Punkt D noch in 2 Punkten A, B begegne, und der Bogen ADB ganz innerhalb, der Rest des Umkreises ganz außerhalb der Ellipse liege.

Bemerk. Liegt der Punkt D Fig. 37. so, daß ein aus ihm auf die große Axe AB gefälltes Perpendikel DC dem über AB beschriebenen Halbkreis in einem Punkt F begegnet, so daß die aus F an den Mittelpunkt O gezogene Linie FO einen halben rechten Winkel FOC mit der großen Axe macht; so ist der Durchmesser der Ellipse DJ gleich seinem zugeordneten Durchmesser, mithin auch gleich seinem Parameter. Denn man ziehe an F die Tangente FL an den Kreis, die der verlängerten großen Axe AB in L begegne, so ist, wenn man LD zieht, diese eine Berührungslinie der Ellipse (11. Satz). Da nun LFO ein rechter, FOL aber ein halber rechter Winkel ist; so ist FLO = FOL (32. I. E.) folglich LF = FO, mithin LC = CO (47. I. E.) folglich auch LD = DO (4. I. E.) mithin DLO = DOL (5. I. E.). Es sey nun QOS der DJ zugeordnete Durchmesser; so ist dieser gleichlauffend mit der Berührungslinie LD (16. Satz), mithin ist SOB = DLO = DOL, oder diese beyde zugeordnete Durchmesser sind gleich geneigt gegen die Ellipse, folglich sind sie unter sich gleich (3. Satz, 1. Zus.) mithin ist auch der Parameter des Durchmessers DJ mit DJ selbst gleich (9. Erkl.) der Punkt, der im Satz E hieß, fällt mithin in diesem Fall mit J zusammen.

In diesem Fall nun wird ein Kreis, der die Linie DL in D berührt, und durch J geht, keinen Punkt außer D und J mit der

Ellipse gemein haben, sondern der Bogen DdJ, auf welchem der Durchmesser des Kreises liegt, wird ganz außerhalb der Ellipse, der übrige Theil des Kreises ganz innerhalb der Ellipse fallen. Diß zu beweisen, ziehe man durch irgend einen Punkt Y des Bogens DYJ eine gerade Linie parallel mit der Tangente LD, die die Sehne DJ in R, den Kreis in Y, X, die Ellipse in N, M schneide und es liege X auf der Seite von R, auf welcher Dd ist, oder mit andern Worten, es seye $XR > RY$. Weil nun (17. Satz) $DJ^2 : QS^2 = DR \times RJ : RN^2$, aber $DJ^2 = QS^2$; so ist $DR \times RJ = RN^2$. Aber auch $XR \times RY = DR \times RJ$ (35. III. E.) $= RN^2$, mithin ist $XR > RN$, und $RY < RN$, folglich liegt X außerhalb, Y innerhalb der Ellipse. Begegnet eine durch einen Punkt des Bogens DdJ mit DL parallel gezogene Linie der Ellipse gar nicht; so ists für sich klar, daß die Punkte, in welchen sie den Kreis schneidet, außerhalb der Ellipse liegen. Wenn in eben diesem Fall, da $DE = DJ$ ist, ein Kreis beschrieben wird, der die Berührungslinie der Ellipse in D berührt, aber von DJ ein Stück DG, das größer oder kleiner als DJ ist, abschneidet; so werden auch in diesem Fall noch die Behauptungen unsers Satzes gelten, und der oben vorgekommene Beweis wird auch jetzt noch angewendet werden können, nur mit dem Unterschied, daß jetzt, weil die Linien HJ, FG Fig. 36. parallel werden, die Linie AB, die nicht, wie oben, durch eine aus dem Durchschnittspunkt jener beyden Linien C gezogene Linie CF bestimmt werden kann, indem es keinen solchen Durchschnittspunkt mehr giebt, parallel mit DJ gezogen werden muß, wo dann sowohl $PQ = pq = WS = wf$, als $AL = BK = ZR = zr$ (34. I. E.), woraus dann von selbst folgt, daß $PQ : AL = pq : BK = WS : ZR = wf : zr$ seye.

1. Zus. Der Krümmungskreis einer Ellipse in dem Scheitel D irgend eines Durchmessers DJ ist der, der die Tangente der Ellipse in diesem Scheitel berührt, und von dem erwähnten Durchmesser ein Stück, das seinem Parameter gleich ist, abschneidet: oder, kein anderer Kreis, der die Ellipse ebenfalls in diesem Scheitel berührt, geht zwischen dem eben bezeichneten

Kreise und der Ellipse durch. Denn die Kreise, die ein größeres Stück als den Parameter abschneiden, und folglich außerhalb des erwähnten Kreises fallen, fallen außerdem auf beiden Seiten des Punkts D außer der Ellipse: die, die ein kleineres Stück abschneiden, fallen innerhalb des Kreises, und außerdem auf beiden Seiten von D innerhalb der Ellipse.

2. Zus. Kein Bogen des Krümmungskreises, so klein er seyn mag, fällt mit der Ellipse zusammen, aber er macht mit ihr einen kleinern Winkel, als jeder andere Kreisbogen, der die Tangente der Ellipse in dem nemlichen Punkt berührt.

3. Zus. Wenn man Fig. 38. aus einem Punkt D einer Ellipse ein Perpendikel auf eine ihrer Axen fällt, und es verlängert, bis es der Ellipse wieder begegnet, alsdann durch diesen Punkt einen Durchmesser der Ellipse Mm, und durch D eine Ordinate an diesen Durchmesser zieht, die der Ellipse wieder in L begegnet; so liegt L auf dem Umfang des Krümmungskreises der Ellipse für den Punkt D.

Es seye DP senkrecht auf der großen Axe der Ellipse Aa, und begegne der Ellipse wieder in M. Durch M ziehe man den Durchmesser Mm und dann Dm. Weil nun MP : PD = MC : Cm; so ist Dm parallel mit CP (2, VI. E.) folglich senkrecht auf die kleine Axe Bb. Hieraus folgt sogleich, daß man einerley Durchmesser Mm erhält, auf welche von den Axen man ein Perpendikel von D fällt. Die Berührungslinie der Ellipse in D begegne ihrer großen Axe in T, und man ziehe MT. Weil nun dieselbe Abscisse CP den beyden Punkten D, M zugehört; so folgt (11. S. 7. Zus.), daß MT die Ellipse in M berühre. Man ziehe nun die den Durchmessern DJ, Mm zugeordnete Durchmesser Nn, Zz, und es begegne Zz der Tangente DT in S, Nn dem Durchmesser Dd in U, und durch D ziehe man die Ordinaten DYL, DXx an die Durchmesser Mm, Zz, und DY begegne dem Durchmesser Nn in V, ferner fälle man aus K dem Mittelpunkte des Krümmungskreises der Ellipse in D das Perpendikel KH auf den Durchmesser der Ellipse DJ. Die halbe Durchmesser CD, CM sind gleich,

weil Δ CPD = CPM ist; mithin sind die ihnen zugeordnete halbe Durchmesser CN, CZ ebenfalls gleich (21. Satz, 7. Zus.) Nun ist $CN^2 = CD \times DH$ (9. Erklär.) weil nemlich $DH = \frac{DE}{2}$ = dem halben Parameter von DJ (1 Zus.) und $CZ^2 = SC \times CX$ (19. Satz) $= VD \times DY$, wegen der Parallelen Cn, DT; Cm, DX; DL, CS. Folglich ist $2CD \times DH = 2VD \times DY$, d. i. $CD \times DE = VD \times DL$. Aber es ist auch $CD \times DE = UD \times Dd$, weil Dd : DE = CD : DU, wegen der ähnlichen Dreyecke DEd, DUC, mithin ist $UD \times Dd = VD \times DL$, folglich Dd : DL = VD : DU; mithin ist Δ DdL ∽ DVU, und namentlich DLd = dem rechten Winkel DUV: folglich liegt der Punkt L auf dem Umfang des über Dd als Durchmesser beschriebenen Kreises.

4. Zus. Die an die Axen gezogene Ordinaten DP, Dp theilen die Winkel LDT, LDO, welche die Linie LD mit der Tangente macht, in 2 gleiche Theile. Denn der Winkel LWa, oder DWP ist, wegen der Parallelen DL, Zz = ZCT = NCT (3. Satz, 1. Zus.) = DTP (wegen der Parallelen CN, DT), mithin sind auch ihre Complemente gleich d. i. LDM = TDM. Ferner weil LDm = LWa und mDO = DTP wegen der Parallelen TC, DP; so ist auch LDm = MDO.

5. Zus. Das Rechteck aus den beyden halben Axen der Ellipse verhält sich zu dem Quadrat von CN dem halben DJ zugeordneten Durchmesser, wie dieser halbe Durchmesser zu dem Krümmungshalbmesser der Ellipse in D. Man fälle aus dem Mittelpunkt der Ellipse C das Perpendikel CO auf die Berührungslinie in D.

Weil nun CO : CD = DH : DK wegen der ähnlichen Dreyecke COD, DHK, und CD : CN = CD : DH (9. Erkl.);

so ist $\left.\begin{matrix} CO \\ \text{oder } NC \times CO \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} \overline{CN} \\ CN^2 \end{matrix}\right. = CN : DK.$ Es ist aber $NC \times CO = AC \times CB$ (22. Satz, Zus.) indem CO = DU, mithin ist $AC \times CB : CN^2 = CN : DK$.

6. Zus. Der Krümmungshalbmesser der Ellipse in irgend einem Punkt D verhält sich zu dem halben Parameter der einen oder der andern von ihren Axen, wie der Würfel dieser halben Axe zu dem Würfel des aus dem Mittelpunkt der Ellipse C auf ihre Berührungslinie in D gefällten Perpendikels.

Denn es ist $DK : CN = CN : CO$ (vorherg. Zus.) $= NC \times CO : CO_2 = AC \times CB : CO^2$. Aber auch $CN : \begin{Bmatrix}AC\\CB\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}CB\\AC\end{Bmatrix} : CO$, mithin ist $DK : AC = AC \times CB^2 : CO^3$. Es ist aber, wenn p der Parameter der großen Axe heißt $AC : \frac{1}{2}p = AC^2 : CB^2$ (9. Erkl.) $= AC^3 : AC \times CB^2$, folglich $DK : \frac{1}{2}p = AC^3 : CO^3$. Und eben so $DK : BC = AC^2 \times CB : CO^3$. Aber wenn P der Parameter der kleinen Axe heißt; so ist $BC : \frac{1}{2}P = BC^2 : AC^2 = BC^3 : AC \times BC$, mithin $DK : \frac{1}{2}P = BC^3 : CO^3$.

7. Zus. Der Krümmungshalbmesser einer Ellipse in irgend einem Punkt D ist die 4te stetige Proportionallinie zu dem halben Parameter der einen oder der andern Axe, und zu der auf diese Axe sich beziehenden Normallinie für diesen Punkt: oder, der Krümmungshalbmesser verhält sich zu dieser Normallinie, wie das Quadrat dieser Normallinie zu dem Quadrat des halben Parameters der Axe, an welche hin die Normallinie geht.

Denn es ist $PC \times CT = AC^2$ (19. Satz), und $PR \times RT = DR^2$, weil $PR : DR = DR : RT$ (8, VI. E.) folglich ist $PC \times CF : PR \times RT = AC^2 : DR^2$. Aber $PR \times RT : PC \times RT = PR : PC = \frac{1}{2}p : AC$ (11. Satz, 9. Zus.) $= \frac{1}{2}p \times AC : AC^2$, mithin ist $PC \times CT : PC \times RT =$ ($CT : RT = CO : RD =$) $\frac{1}{2}p \times AC : DR^2$, oder $CO : CA = \frac{1}{2}p : DR = AC : DQ$ (11. Satz, 12. Zus.), folglich $CO^3 : AC^3 = (\frac{p}{2})^3 : DR^3$. Nun ist (6. Zus.) $DK : \frac{1}{2}p = AC^3 : CO^3$, mithin $DK : \frac{1}{2}p = DR^3 : (\frac{1}{2}p)^3$, oder $DK : DR = DR^2 : (\frac{1}{2}p)^2$.

Eben so, weil $CO : AC = AC : DQ$, und $AC^2 = \frac{1}{2}P \times CB$ (9. Erklär.) so ist $CO : CB = \frac{1}{2}P : DQ$, mithin $CO^3 : CB^3 = (\frac{1}{2}P)^3 : DQ^3$ mithin, da $DK : \frac{1}{2}P = CB_3 : CO^3$ (6. Zus.) $= DQ^3 : (\frac{1}{2}P)^3$, folglich $DK : DQ = DQ^2 : (\frac{1}{2}P)^2$.

8. Zus. Die Krümmungshalbmesser verschiedener Punkte einer Ellipse stehen unter einander in dem geraden triplicirten Verhältniß oder in dem Verhältniß der Würfel der auf einerley Axe sich beziehenden Normallinien dieser Punkte, aber im umgekehrten triplicirten Verhältniß der von dem Mittelpunkt der Ellipse auf die Tangenten dieser Punkte gefällten Perpendikel (6. und 7. Zus.).

9. Zus. Die Krümmungshalbmesser einer Ellipse wachsen mit ihren Normallinien (11. Satz, 11. Zus.) von den Scheiteln ihrer großen Axe bis zu den Scheiteln der kleinen Axe: mithin nimmt die Krümmung der Ellipse, die diesen Krümmungshalbmessern umgekehrt proportional ist, allmählig ab von den Scheiteln der großen Axe, wo sie am grösten ist, bis zu den Scheiteln der kleinen Axe, wo sie am kleinsten ist.

10. Zus. Der Punkt, in welchem Fig. 39. 2 Normallinien NL, MK von 2 Punkten N, M einer Ellipse sich begegnen, wird der Mittelpunkt des Krümmungskreises, wenn diese 2 Punkte der Ellipse, nachdem sie einander näher und näher gekommen sind, in D zusammen fallen. Denn, wenn die Normalen LN, ML die große Axe in S, U schneiden, und man zieht NV parallel mit der großen Axe; so ist $LN : LS = NV : SU$. Man ziehe die Linie MN, die der großen Axe in Z begegne, und fälle von M, N auf die große Axe die Perpendikel MQ, NO, die der großen Axe in Q, O begegnen, und NV begegne dem Perpendikel MQ in X; so ist immer $NV : MN = ZU : MZ$, aber auch $MN : NX = MZ : ZQ$, folglich $NV : \left\{ {NX \atop OQ} \right\} = ZU : ZQ$, und, wenn C der Mittelpunkt der Ellipse ist, $CO : OS = CQ : QU = AC : \frac{1}{2}p$ (11. Satz, 9. Zus.), mithin $OQ : OS - QU = AC : \frac{1}{2}p$, folglich $OQ : \left\{ {OQ - OS + QU \atop SU} \right\} = AC : AC - \frac{1}{2}p$. Folglich, weil $NV : OQ = ZU : ZQ$, und $OQ : SU = AC : AC - \frac{1}{2}p$; so ist $NV : SU = LN : LS = AC . ZU : (AC - \frac{1}{2}p) ZQ$. Wenn nun die Punkte M, N in D zusammenfallen, folglich auch die

Nor-

Normalen NL, ML, mit der Normale durch D, und der Punkt L mit K zusammenfällt; so fällt die Linie MN mit der Tangente DT zusammen, und (wenn man von D das Perpendikel DP auf die große Axe fällt) die Punkte O, Q mit P, und die Punkte S, U mit dem Punkt R, in welchem die Normale DK die große Axe schneidet. Mithin ist $KD : KR = AC . TR : (AC - \frac{1}{2}p) . TP$.

Aber $TR : TD = DR : DP$

und $TD : TP = DR : DP$

---

folglich $TR : TP = DR^2 : DP_2$, folglich $KD : KR = AC . DR^2 : (CA - \frac{1}{2}p) DP^2$, oder $KD : DR = AC . DR^2 : AC (DR^2 - DP^2) + \frac{1}{2}p . DP^2 = AC^2 . DR^2 : AC^2 . PR^2 + \frac{1}{2}p . AC . DP^2 = AC^2 . DR^2 : (\frac{1}{2}p)^2 . CP^2 + (\frac{1}{2}p)^2 . (AC^2 - CP^2)$ weil $CP_2 : PR^2 = AC^2 : (\frac{1}{2}p)^2$ (11. Satz, 9. Zus.), und $DP^2 : AC^2 - CP^2 = \frac{1}{2}p : AC$ (7. Satz), mithin $KD : DR = DR^2 : (\frac{1}{2}p)^2$, mithin (7. Zus.) $KD =$ dem Krümmungshalbmesser in D.

11. Zus. Wenn ein Bogen MDN einer Ellipse sehr klein ist, so fällt mithin der Punkt L, in welchem die Normalen seiner Endpunkte zusammentreffen, sehr nahe an den Mittelpunkt K, des Krümmungskreises in der Mitte von MDN, und der Bogen MDN ist nur wenig unterschieden von dem Bogen des Krümmungskreises in D.

Satz 37.

(Archimeds 5ter Satz des Buchs von den Konoiden und Sphäroiden.) Fig. B.

Der Innhalt einer Ellipse ABCD verhält sich zu dem Innhalt eines Kreises ACEF, dessen Durchmesser gleich ist der großen Axe der Ellipse, wie die kleine Axe der Ellipse zu ihrer großen Axe d. h. zu dem Durchmesser des Kreises.

BD seye die kleine Axe der Ellipse. Es habe der Kreis Z zu dem Kreis ACEF eben das Verhältniß, welches BD : AC hat; so wird die Ellipse ABCD gleich dem Kreise Z seyn. Denn, wenn der Kreis Z nicht gleich ist der Ellipse ABCD; so seye er

1) wenns möglich ist, kleiner als diese Ellipse. Unter dieser Voraussetzung müßte man in den Kreis Z ein reguläres Vieleck von einer geraden Seitenzahl beschreiben können, das größer wäre, als die Ellipse ABCD. Man denke sich diß geschehen, und beschreibe in den Kreis ACEF ein, dem in den Kreis Z beschriebenen, ähnliches Vieleck, das von AC halbirt werde, und fälle aus seinen Winkelpunkten Perpendikel auf den Durchmesser AC. Die Punkte, in welchen diese Perpendikel die Ellipse schneiden, verbinde man durch gerade Linien; so erhält man eine in die Ellipse beschriebene geradlinichte Figur, die sich zu der in den Kreis ACEF beschriebenen verhält, wie BD zu AC. Denn, weil die Perpendikel EH, KL in M, B in einerley Verhältniß geschnitten sind (II. B. 7. S. Zus.); so hat das Trapez LE zu dem Trapez HM eben das Verhältniß wie HE:HB oder wie AC:BD. Eben so hat jedes der übrigen Trapeze im Kreise zu jedem korrespondirenden übrigen Trapeze in der Ellipse eben diß Verhältniß. Endlich haben noch die Dreyecke in dem Kreise bey den Punkten A, C zu den Dreyecken in der Ellipse an diesen Punkten eben diß Verhältniß. Folglich hat die ganze geradlinichte Figur in dem Kreise ACEF zu der geradlinichten Figur in der Ellipse eben das Verhältniß wie AC:BD. Aber eben so verhält sich auch das Vieleck im Kreise ACEF zu dem Vieleck im Kreise Z, weil diese Kreise selbst sich so verhalten, mithin ist das Vieleck in der Ellipse gleich dem Vieleck im Kreise Z, was unmöglich ist, denn das Vieleck im Kreise Z sollte auch größer seyn, als die ganze Ellipse. Es seye nun

2) wenns möglich ist, der Kreis Z kleiner als die Ellipse; so kann man wieder in die Ellipse ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl (so daß AC durch die Endpunkte von 2 seiner Seiten geht) beschreiben, das größer ist, als der Kreis Z. (Diß läßt sich nemlich gröstentheils auf ähnliche Art beweisen, wie Euklid 2, XII. E. die Sache für den Kreis darthut.) Diß seye geschehen, und man fälle aus den Winkelpunkten dieses Vielecks Perpendikel auf AC, und verlängere sie bis an den Umfang des Kreises ACEF,

so erhält man wieder in dem Kreis ACEF ein Vieleck, das sich zu dem in der Ellipse verhält, wie AC:BD. Beschreibt man nun in den Kreis Z ein dem in dem Kreis ACEF ähnliches Vieleck; so wird wie bey Nr. 1. bewiesen, daß das Vieleck in der Ellipse dem im Kreise Z gleich seyn müßte, was unmöglich ist. Folglich kann der Kreis Z auch nicht kleiner seyn, als die Ellipse. Mithin muß die Ellipse gleich seyn dem Kreis Z, und daher zu dem Kreis ACEF sich verhalten wie BD zu AC.

Satz 38.

(Archimeds 6ter Satz des Buchs von den Konoiden und Sphäroiden.) Fig. C.

Die Fläche einer Ellipse ABCD verhält sich zu der Fläche irgend eines Kreises Z, wie das Rechteck aus den beyden Axen der Ellipse $AC \times BD$ zu dem Quadrat des dem Kreis Z zugehörigen Durchmessers EF.

Man beschreibe einen Kreis um die große Axe AC der Ellipse; so verhält sich die Ellipse zu dem Kreis über AC nach dem vorhergehenden Satz wie $BD : AC$ d. h. wie $AC \times BD : AC^2$. Aber der Kreis über AC verhält sich zu dem Kreis Z über EF, wie $AC^2 : EF^2$ (2, XII. E.). Folglich die Ellipse zu dem Kreise Z wie $AC \times BD$ zu EF_2.

Satz 39.

(Archimeds 7ter Satz von den Konoiden und Sphäroiden.) Fig. D.

Die Flächen zweyer Ellipsen A, B verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke aus ihren Axen.

Es seye CD das Rechteck aus den Axen der Ellipse A; EF das Rechteck aus den Axen der Ellipse B. Man nehme irgend einen Kreis Z, und es seye KL das Quadrat seines Durchmessers; so ist $A : Z = CD : KL$

$Z : B = KL : EF$

mithin $A : B = CD : EF$.

Drittes Buch.

Von der Hyperbel.

Erklärungen.

1.) Es seye Fig. 1. in einer Ebene das Ende E eines Lineals EH so in einem Punkt E bevestigt, daß man es frey um diesen Punkt als einen Mittelpunkt drehen könne, und an den andern Endpunkt H des Lineals seye ein Faden, der kürzer ist, als das Lineal, gebunden, und das andere Ende des Fadens in einem Punkt F in derselben Ebene bevestigt — wobey jedoch die Entfernung der Punkte E, F grösser seyn muß, als der Ueberschuß der Länge des Lineals über die Länge des Fadens — und man ziehe vermittelst eines Stifts den Faden an das Lineal EH an, und drehe diß Lineal, während der Faden immer an dem Lineal angespannt bleibt: so beschreibt der Stift eine Linie, die man **Hyperbel** nennt. Bevestigt man aber den Endpunkt des Lineals, der in E war, nun in F, und dagegen das Ende des Fadens in E, und verfährt wie vorhin; so beschreibt der Stift eine andere, der vorigen gegenüber liegende Linie, die ebenfalls **Hyperbel** heißt, und beide zusammen nennt man **entgegengesetzte Hyperbeln**. Man kann diese Linien auf eine Entfernung von E, F, die jede gegebene Entfernung übersteigt, fortsetzen, wenn man einen Faden nimmt, dessen Länge größer ist, als diese Entfernung.

2.) Die Punkte E, F heißen die **Brennpunkte**.

3.) Der Punkt C aber, der die Linie zwischen den Brennpunkten halbirt, der **Mittelpunkt der Hyperbel**, oder der **entgegengesetzten Hyperbeln**.

4.) Jede gerade Linie, die durch den Mittelpunkt geht, und den Hyperbeln begegnet, heißt ein **Zwerg-Durchmesser**, und die Punkte, in welchen sie den Hyperbeln begegnet, seine

Scheitelpunkte: eine gerade Linie aber, die durch den Mittelpunkt geht, und eine durch die entgegengesetzte Hyperbeln begränzte; aber nicht durch den Mittelpunkt gezogene Linie halbirt, heißt ein Nebendurchmesser.

5. Der Durchmesser, der durch die Brennpunkte geht, heißt Zwerg-Axe. (Aus der Beschreibung der Hyperbel 1. Erkl. erhellt, daß 2 entgegengesetzte Hyperbeln ihrer Zwerg-Axe nur in 2 Punkten A, a begegnen können.)

6.) Wenn man eine Linie AD gleich der Entfernung CF des Mittelpunkts von einem Brennpunkt nimmt, und aus einem Scheitel A oder a der Zwerg-Axe mit dem Halbmesser AD einen Kreis beschreibt, der dem aus dem Mittelpunkt der Hyperbel C auf die Zwerg-Axe errichteten Perpendikel in B, b begegnet; so heißt die gerade Linie Bb die zweyte oder zugeordnet Axe. (Hieraus läßt sich leicht herleiten, wie man, wenn di beyde Axen einer Hyperbel gegeben sind, ihre Brennpunkte finden mithin die Hyperbel beschreiben kann.)

(7.) Eine Hyperbel, deren beyde Axen gleich sind, heiß eine gleichseitige Hyperbel.)

8.) (Simsons 7te) Zwey Durchmesser, von denen jeder alle mit dem andern parallel gezogene, und durch eine Hyperbel oder die entgegengesetzten Hyperbeln begränzte gerade Linien halbirt, heissen zugeordnete Durchmesser.

9.) (Simsons 8te) Jede gerade, nicht durch den Mittelpunkt gezogene, aber durch eine Hyperbel oder durch entgegengesetzte Hyperbeln begränzte, und von einem Durchmesser halbirte Linie, heißt eine Ordinate dieses Durchmessers: auch sagt man von einem Durchmesser, der mit einer Ordinate eines andern Durchmessers parallel läuft, er seye an diesen unter dem Ordinatenwinkel gezogen.

10.) Simsons 9te) Eine gerade Linie, die einer Hyperbel nur in einem einzigen Punkt begegnet, beiderseits verlängert aber ausserhalb der engegengesetzten Hyperbeln fällt, heißt eine Berührungslinie der Hyperbel in diesem Punkt.

Bemerk. Noch einige weitere Erklärungen finden sich unten nach Satz 13, ferner nach Satz 30, bey Satz 39, 5. 7. Zus. und nach Satz 43.

Satz 1. (Simsons 1. S.) Fig. 1.

Wenn aus einem Punkt G einer Hyperbel an die Brennpunkte E, F zwey gerade Linien GE, GF gezogen werden; so ist ihr Unterschied gleich der Zwergaxe Aa.

Es stelle EGH das Lineal, und FGH den Faden vor, während der die Hyperbel beschreibende Stift in G ist. Man nehme von EH, und FGH das Stück GH hinweg, das sie gemeinschaftlich haben; so ist EG — GF = EH — den Faden FGH; und dasselbe findet Statt, wo der Punkt G in den Hyperbeln liegen mag. Weil nun auch die Scheitelpunkte der Zwergaxe auf den Hyperbeln liegen; so ist sowohl AE — AF als aF — aE = dem Überschuß der Länge des Lineals über die Länge des Fadens, oder = EG — GF, mithin ist AE — AF = aF — aE. Aber AE — AF = FE — 2AF, und eben so aF — aE = FE — 2aE, folglich ist FE — 2AF = FE — 2aE, mithin 2AF = 2aE, oder AF = aE, folglich ist AE — AF = AE — aE = Aa, mithin auch EG — GF = Aa.

Zus. (Simſ. 3.) Und weil AF = aE, und CF = CE; so ist auch CA = Ca, oder die Zwergaxe wird in dem Mittelpunkt C halbirt.

Satz 2. (Simſ. 2. S.) Fig. 2.

Umgekehrt, wenn man aus einem Punkt G an die Brennpunkte E, F von entgegengesetzten Hyperbeln 2 gerade Linien GE, GF zieht, deren Unterschied gleich ist der Zwergaxe Aa; so liegt der Punkt G in einer der entgegengesetzten Hyperbeln.

Es seye GF die kleinere der Linien GE, GF, und man beschreibe aus dem Mittelpunkt F mit dem Durchmesser FG einen Kreis, der der Linie FE in H begegne, und nehme GK = GF; so ist, nach der Voraussetzung KE = der Zwergaxe Aa: und, weil FG + GE > FE; so ist FG + GK > FA + aE, mithin

$\frac{1}{2}(FG + GK) > \frac{1}{2}(FA + aE)$ d. i. $\left.\begin{matrix}FG\\FH\end{matrix}\right\} > FA$; mithin fällt die Hyperbel auf der Seite von A innerhalb des Kreises. Und, da sie auf eine Entfernung vom Mittelpunkt fortgeführt werden kann, die eine jede gegebene Entfernung übertrift, so schneidet sie nothwendig den Kreis. Sie schneidet ihn aber in G: denn, wenn es möglich ist, schneide sie ihn in einem andern Punkt D auf eben der Seite der Axe, auf welcher G liegt, und man ziehe DE, DF; so müßte (1st. Satz) $DE - DF = Aa = GE - GF$, mithin, da DF, GF gleich sind, auch $DE = GE$ seyn, was nicht möglich ist (7, I. E.). Folglich liegt der Punkt G auf der Hyperbel.

Zus. Man kann geometrisch so viele Punkte einer Hyperbel, als man will, bestimmen. Man schneide nemlich Fig. 1. aus einem Brennpunkt F auf der Zwergaxe Aa ein Stück $FK = Aa$ ab, und beschreibe dann mit einem Halbmesser $FJ > Fa$ einen Bogen, und aus dem andern Brennpunkt E einen Bogen mit dem Halbmesser JK. Diese Bogen werden sich auf beyden Seiten der Linie FE schneiden, und ihre Durchschnittspunkt M, m werden auf der Hyperbel liegen. Denn $EM + FM = FJ + JK = Fa + 2Ja + aK = Fa + 2Ja + Ea$, folglich $EM + FM > FE$. Aber auch $FM - EM = FJ - JK = FK = Aa$ folglich $FM = Aa + EM$, mithin $FM < FE + EM$. Und, da $EM = JK$, mithin $EM < \left\{\begin{matrix}JF\\FM\end{matrix}\right.$; so ist um so vielmehr $EM < EF + FM$. Folglich schneiden sich die Kreise in Punkten M, m, und diese liegen auf der Hyperbel. Eben so kann man 2 andere Punkte N, n der entgegengesetzten Hyperbel bestimmen, wenn man aus E einen Kreisbogen mit einem Halbmesser $EN = FM = FJ$, und aus F einen andern Bogen mit dem Halbmesser $FN = EM = JK$ beschreibt.

Satz 3. (Simſ. 3. S.) Fig. 2.

Wenn man aus einem Punkt L ausserhalb der Hyperbel an die Brennpunkte die Linien LE, LF zieht; so ist ihr Unterschied kleiner als die Zwergaxe Aa; wenn man aber aus einem Punkt

M innerhalb der Hyperbel gerade Linien an die Brennpunkte zieht; so ist ihr Unterschied grösser als die Zwergaxe Aa: und umgekehrt.

Denn weil L ausserhalb, F innerhalb der Hyperbel ist; so muß LF der Hyperbel nothwendig begegnen. Es geschehe diß in G, und man ziehe GE; so ist $EL < EG + GL$, mithin $EL - LF < EG + GL - LF$ d. i. $< EG - GF$ oder $EL - LF < Aa$. Ist hingegen M innerhalb einer Hyperbel, so ziehe man ME, MF, und es wird ME der Hyperbel nothwendig begegnen, weil M innerhalb, E ausserhalb der Hyperbel ist. Es geschehe diß in N, und man ziehe NF. Weil nun $MF < MN + NF$; so ist $ME - MF > ME - (MN + NF)$ d. i. $> NE - NF$ oder $> Aa$.

Und umgekehrt, wenn der Unterschied von 2 Linien, die aus einem Punkt an die Brennpunkte gezogen werden, kleiner oder grösser ist, als die Zwergaxe; so ist dieser Punkt ausserhalb oder innerhalb der Hyperbel, (und zwar im letzten Fall innerhalb des Schenkels der Hyperbel, deren Brennpunkt ihm näher liegt).

1. Zus. (Simsons Z.) Wenn daher durch den Scheitel A der Zwergaxe einer Hyperbel eine Linie senkrecht auf die große Axe gezogen wird, so fällt diese ganz ausserhalb der Hyperbel und berührt mithin die Hyperbel. Denn man nehme auf dieser Linie irgend einen Punkt Q, ziehe QF, QE, schneide auf der Axe $AR = AF$ ab, und ziehe QR. Weil nun $AR = AF = aE$; so ist $RE = Aa$. Aber auch $QF = QR$, und $QE < QR + RE$, mithin $QE - \left\{ \begin{matrix} QR \\ QF \end{matrix} \right\} < RE$ d. i. $QE - QF < Aa$; folglich fällt jeder Punkt Q der Linie AQ, mithin AQ selbst ausserhalb der Hyperbel.

b) (Ist hingegen aus einem Scheitel a der Zwergaxe eine Linie SU unter einem schiefen Winkel gegen die Zwergaxe gezogen, so schneidet diese die Hyperbel. Denn man fälle aus dem nähern Brennpunkt E ein Perpendikel EO auf diese Linie, so fällt diß auf die Seite des spitzigen Winkels, und es ist $EO < Ea$ oder $< Fa$. Zieht man dann aus dem entferntern Brennpunkt F die Linie FO, so fällt diese auf die Seite des stumpfen Winkels FaO,

und es ist FO > Fa, mithin FO — EO > Ea — FA d. i. > Aa, mithin liegt O innerhalb der Hyperbel, folglich schneidet die Linie SU die Hyperbel.)

2. Zus. Wenn man Fig. 3. über EF, dem Abstand der beyden Brennpunkte von einander als Durchmesser einen Kreis, und dann aus dem einen Brennpunkt F einen andern Kreis mit einem Halbmesser, der gleich ist der Zwergaxe Aa, beschreibt, und aus dem Brennpunkt F an die Punkte K, k, in welchen diese Kreise einander schneiden, gerade Linien FK, Fk zieht, so begegnet jede von diesen Linien der Hyperbel in einem einzigen Punkt. Alle gerade durch den Brennpunkt F gezogene Linien hingegen, die mit der Zwergaxe einen kleinern spitzigen Winkel machen, als der Winkel EFK ist, begegnen der Hyperbel (den entgegengesetzten Hyperbeln) in 2 Punkten, aber nicht in mehreren, und zwar auf einerley Seite des Brennpunkts F: endlich alle gerade durch den Brennpunkt F gezogene Linien, die mit der Zwergaxe einen größern spitzigen (den rechten mit eingeschlossen) Winkel machen, als der Winkel EFK ist, begegnen der Hyperbel ebenfalls in 2 Punkten, aber nicht in mehreren, und zwar auf verschiedenen Seiten des Brennpunkts F.

1.) Die Linien FK, Fk begegnen dem aus dem Mittelpunkte F beschriebenen Kreise wieder in L, l. Man ziehe die Linien EK, EL; so ist der Winkel EKL als Winkel im Halbkreis ein rechter Winkel, mithin der Winkel ELK spitzig. Man mache den Winkel LEP = ELK, so werden, weil diese beyde Winkel spitzig sind, ihre Schenkel EP, LK in einem Punkt P zusammenlauffen, und es wird EP = PL seyn, mithin EP — FP = PL — FP = FL = Aa, folglich liegt der Punkt P auf der Hyperbel (2ter Satz).

Man ziehe nun an irgend einen Punkt V zwischen P und F die Linie EV; so ist der Winkel LEV < LEP mithin < ELK, folglich EV > VL, mithin EV — FV > VL — FV d. i. > FL oder > Aa, mithin liegt der Punkt V innerhalb der Hyperbel. Zieht man hingegen an irgend einen Punkt T der über F hinaus verlängerten Linie KF eine Linie ET; so ist, wegen des rechten

Winkels bey K, ET > KT, mithin ET — FT > KT — FT d. i. > KF oder > Aa, mithin der Punkt T innerhalb der Hyperbel. Und eben diß gilt für den Punkt L. Zieht man ferner an irgend einen Punkt X, der zwischen P und K liegt, die Linie EX; so ist, weil der Winkel XEL > PEL, oder > PLE, EX < XL, mithin EX — FX < XL — FX d. i. < FL oder < Aa, folglich liegt der Punkt X außer der Hyperbel. Diß gilt nun eben so von dem Punkt K, und von jedem Punkte Z, der auf der über K hinaus verlängerten Linie LK liegt, so lange diese Punkte X, K, Z so liegen, daß sie näher bey F als bey E sind, und z. B. EZ > FZ. Wird EZ = FZ; so ist EZ — FZ = o, mithin < Aa. Wird endlich FZ > EZ, so ist, wegen des rechten Winkels bey K, immer EZ > KZ, mithin FZ — EZ < FZ — KZ d. i. < FK oder < Aa. Mithin begegnet die Linie KFL der Hyperbel (nach ihren beyden Schenkeln betrachtet, oder den entgegengesetzten Hyperbeln) nur in dem einzigen Punkt P. Und eben so ists mit der Linie KFl.

2.) Es seye nun HFJ eine Linie, die mit EF einen spitzigen Winkel HFE macht, der kleiner ist als KFE oder kFE. Man ziehe aus dem andern Brennpunkt E die gerade Linien EH, EJ an die Punkte H, J, in welchen sie den aus F beschriebenen Kreis schneidet, und mache den Winkel JEM = EJF, und den Winkel HEm = EHm, so daß ME = MJ, und mE = mH wird, folglich EM — FM = JM — FM = FJ = Aa, und Fm — Em = Fm — Hm = FH = Aa; so liegen die Punkte M, m auf der Hyperbel. Da nun der Winkel FHE stumpf ist, weil er größer ist, als der rechte FkE (21, I. E.), und folglich die Winkel FJE, EHm spitzig sind; so giebt es wirklich immer solche Punkte M, m in welchen sich die Linien JH, EM, und JH, Em schneiden, auch fallen sie auf einerley Seite von F.

3.) Es seye eine Linie SFO, die mit EF einen spitzigen Winkel EFO, der größer ist, als EFk, oder auch einen rechten Winkel mache. Man ziehe aus dem andern Brennpunkt E die Linien EO, ES an die Punkte, in welchen sie dem aus dem Mittelpunkt F

beschriebenen Kreise begegnet, und mache den Winkel $CEQ = FOE$, ung $SEq = FSE$, so daß $EQ = OQ$, und $Eq = Sq$, mithin $EQ - FQ = FO = Aa$, und $Eq - Fq = FS = Aa$; so sind die Punkte Q, q in der Hyperbel. Solche Punkte Q, q in welchen die Linien FS, EQ, und FO, Eq zusammentreffen, finden nun immer Statt, weil der Winkel $FOE < FkE$, mithin spitzig, und der Winkel $FSE <$ oder höchstens $= FOE$ ist, indem $EO < ES$, oder höchstens $= ES$, wenn SO senkrecht auf EF steht; aber die Punkte Q, q fallen auf entgegengesetzt Seiten von F.

Uebrigens beweißt man bey Nr. 2. 3. wie bey Nr. 1. daß weder die Linie HFJ, noch die Linie SFO der Hyperbel in einem andern ausser den angezeigten Punkten begegnen könne.

Bemerk. Ein Kreis, wie der hier aus einem Brennpunkt F mit einem Halbmesser, der der Zwergaxe gleich ist, beschrieben, und eben so ein auf ähnliche Weise aus dem Brennpunkt einer Ellipse mit einem ihrer großen Axe gleichen Halbmesser beschrieben, (wie z. B. Fig. 2. der Ellipse der wäre, den man aus D mit dem Halbmesser $DH = DJ = AB$ beschreiben könnte) spielt in Bezug auf die Hyperbel und die Ellipse eben die Rolle, wie die Directrix bey der Parabel, und wirklich sind auch diese Kreise von verschiedenen Mathematikern so betrachtet worden, wo mithin Directrix in einem andern Sinn genommen wird, als im 6ten Satz unsers 2ten Buchs, oder unten im 7ten Satz dieses 3ten Buchs.

Satz 4. (Simsons 4. 6.) Fig. 1.

Das Quadrat der halben zweyten Axe ist gleich dem Rechteck zwischen den Stücken der Linien zwischen einem Brennpunkt, und den Scheitelpunkten der Zwergaxe

Es seye Aa die Zwergaxe, C der Mittelpunkt, E, F die Brennpunkte, Bb die zweyte Axe, welche, wie aus 6. Erklär. erhellt, im Mittelpunkt halbirt wird. Man ziehe AB. Weil nun $AB = CF$ (6. Erkl.); so ist $AC^2 + CB^2 = CF^2 = AC^2 + AF \times Fa$ (6, II. E.), folglich $CB^2 = AF \times Fa$.

1. Zus. In einer gleichseitigen Hyperbel verhält sich das Qua-

drat der Entfernungen der Brennpunkte zu dem Quadrat einer Axe, wie 2 zu 1. Denn alsdann ist $CF^2 = 2AC^2 = 2BC^2$.

2. Zus. Da in jeder Hyperbel AF = aE; so ist auch $CB^2 = Fa \times aE = FA \times AE$.

Satz 5. (Simsons 5. S.) Fig. 4.

Wenn man aus einem Punkt der Hyperbel G eine gerade Linie GD senkecht auf die Zwergaxe Aa, und aus eben demselben Punkt eie Linie GF an den dem Punkt G nähern Brennpunkt zieht; so verhält sich die halbe Zwergaxe CA zu CF der Entfernung des Brennpunkts von dem Mittelpunkt, wie CD die Entfernung des Perpendikels von dem Mittelpunkt, zu der Summe der halben Zwergxe und der an den Breunpunkt gezogenen Linie.

Man ziehe GE an deu andern Brennpunkt, und nehme auf der verlängerten Zwergaxe AH = GF, und beschreibe aus dem Mittelpunkt G mit dem Halbmesser GF einen Kreis, der der Axe Aa wieder in K, und der Linie EG in M, L begegne: und weil EF = 2CF, und K = 2FD, so ist auch EK = 2CD. Und da EL oder Aa = 2CA, und LM = 2GF, oder = 2AH; so wird auch EM = 2CH seyn. Wegen des Kreises aber ist $\left.\begin{matrix}EL\\Aa\end{matrix}\right\}$: EF = EK : EM, mithin CA : CF = CD : CH.

Bem. Sollte GF selbst senkrecht seyn auf Aa; so würde der aus G beschriebene Keis die Linie F in Aa berühren, und man hätte CA : CF = CF : CH.

Satz 6. (Simsons 6. S.) Fig. 4.

Wenn alles bleibt wie bey dem vorigen Satz; so ist das Quadrat des Perpendikls GD gleich dem Ueberschuß des Rechtecks EH × HF (zwischen den Stücken der Axe, von den Brennpunkten an den Punkt H) über das Rechteck AD × Da (zwischen den Stücken der Axe von den Scheiteln der Zwergaxe an das Perpendikel GD).

Denn, weil CH in A beliebig geschnitten ist; so ist $CA^2 + CH^2 = 2AC \times CH + AH^2$ (7. L. E.) oder, (weil CA : CF = CD : CH)

$= 2.DC \times CF + \left\{\begin{matrix} AH^2 \\ GF^2 \end{matrix}\right. = 2DC \times CF + DF^2 + DG^2 = FC^2 + CD^2 + DG^2$ (7, II. E.) mithin, wenn man beyderseits $CA^2 + FC^2$ hinwegnimmt, ist (6, II. E.) $EH \times HF = AD \times DA + DG^2$, oder $DG^2 = EH \times HF - AD \times DA$.

Satz 7. Fig. 5.

Wenn man auf der Zwergaxe einer Hyperbel von dem Mittelpunkt C aus ein Stück CK abschneidet, so daß CK die 3te geometrische Proportionallinie ist zu CF der Entfernung eines Brennpunkts vom Mittelpunkt, und zu AC der halben Zwergaxe der Hyperbel, und dann aus K ein Perpendikel LJ von unbestimmter Länge auf der Zwergaxe errichtet (diß pflegt man die Directrix der Hyperbel zu nennen); so haben alle Punkte der Hyperbel eine ungleiche Entfernung von diesem Perpendikel, und dem ihm zunächst gelegenen Brennpunkt F, nemlich sie sind weiter entfernt von dem Brennpunkt, als von der Directrix. Jedoch haben alle diese Entfernungen unter sich gleiches Verhältniß, nemlich, die Entfernung eines jeden Punkts der Hyperbel von der Directrix verhält sich zu seiner Entfernung von dem der Directrix zunächst gelegenen Brennpunkt, wie die Zwergaxe der Hyperbel zu der Entfernung ihrer Brennpunkte E, F von einander. Denn

1.) in Ansehung der Scheitel A, a der Zwergaxe ist, weil $CK : CA = CA : CF$, auch $CA \mp CK : CF \mp CA = CA : CF$ d. i. $\left.\begin{matrix} AK \\ aK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} AF \\ aF \end{matrix}\right. = CA : CF = Aa : EF.$

2.) Für Punkte N, n der Hyperbel, die in den aus den Brennpunkten errichteten Perpendikeln liegen, ist $CF : CA + FN = CA : CF$ (5. Satz, Bem.) $= CK : CA$ (Verzeichn.), mithin $CF - CK : FN = CK : CA$, d. i. wenn man NP senkrecht auf die Directrix zieht, $PN : FN = CK : CA = CA : CF = Aa : EF$. Und auf ähnliche Art erhält man $pn : Fn = Aa : EF$.

3.) Für irgend einen andern Punkt G, g der Hyperbel, ist $CD : CA + GF = CA : CF$ (5. Satz) $= CK : CA$ (Verzeichn.) mithin $CD - CK : GF = CK : CA$, d. i. wenn man von G das Per-

pendikel GQ auf die Directrix fällt, GQ:GF = CK:CA = CA:CF = Aa : EF. Und eben so wird gezeigt, daß gq : gF = Aa : EF seye. Da nun, wie aus Satz 1. folgt, Aa immer kleiner ist als EF; so ist die Entfernung eines jeden Punkts der Hyperbel von der Directrix kleiner, als die Entfernung desselben Punkts von dem der Directrix zunächst gelegenen Brennpunkt.

Satz 8. (Simsons 7. S.) Fig. 4.

Wenn man aus einem Punkt G einer Hyperbel eine mit der zweyten Axe Bb parallele Linie zieht, die der Zwergaxe in D begegnet, so verhält sich das Quadrat der Zwergaxe Aa zu dem Quadrat der zweyten Axe Bb, wie das Rechteck AD × DA zwischen den Scheiteln der Zwergaxe und der Linie GD zu dem Quadrat der Linie GD selbst.

Man mache dieselbe Verzeichnung, wie bey Satz 5. Da nun CH : CD = CF : CA; so ist auch $CH^2 : CD^2 = CF^2 : CA^2$, mithin auch $CH^2 - CF^2 : CD^2 - CA^2 = CF^2 : CA^2$ d. i. (6, II. E.) EH × HF : AD × Da = $CF^2 : CA^2$, folglich auch EH × HF — AD × Da : AD × Da = $CF^2 - CA^2 : CA^2$ d. i. DG^2 : AD × Da = AF × Fa : CA^2 (6. Satz, und 6, II. E.) = $CB^2 : CA^2$ (4. Satz) und umgekehrt $CA^2 : CB^2$ = AD × Da : DG^2.

Zus. (Simf. Zus.) Daher verhalten sich die Quadrate der geraden Linien, die aus Punkten einer Hyperbel oder entgegengesetzter Hyperbeln parallel mit der zweyten Axe an die Zwergaxe gezogen werden, zu einander, wie die Rechtecke der Stücke, die zwischen ihnen und den Scheiteln der Zwergaxe abgeschnitten werden, wie bey der Ellipse gezeigt worden.

Satz 9. (Simsons 8. S.) Fig. 4.

Wenn aus einem Punkt G einer Hyperbel eine gerade Linie parallel mit der Zwergaxe gezogen wird, die der zweyten Axe in N begegnet; so verhält sich das Quadrat der zweyten Axe zu dem Quadrate der Zwergaxe, wie die Summe der Quadrate der halben zweyten Axe CB und ihres Stücks CN zwischen der gezogenen Linie und dem Mittelpunkt, zu dem Quadrat der gezogenen Linie GN.

Denn nach dem vorhergehenden Satz ist $CA^2 : CB^2 = AD \times Da : GD^2$, folglich umgekehrt und nach 12, V. E. $CB^2 : CA^2 = GD^2 + CB^2 : AD \times Da + CA^2 = CB^2 + CN^2 : \begin{cases} CD^2 \\ GN^2 \end{cases}$.

1. Zus. (Sims. 3.) Wenn daher aus 2 Punkten einer Hyperbel oder entgegengesetzter Hyperbeln zwey gerade Linien an die zweyte Axe parallel mit der Zwergaxe gezogen werden, so verhält sich das Quadrat der einen zu dem Quadrat der andern, wie die Summe der Quadrate der halben zweyten Axe und der Entfernung der ersten Parallele von dem Mittelpunkt, zu der Summe der Quadrate der halben zweyten Axe und der Entfernung der zweyten Parallele von dem Mittelpunkt.

2. Zus. In einer gleichseitigen Hyperbel ist das Quadrat einer jeden von einem Punkt der Hyperbel an die zweyte Axe parallel mit der Zwergaxe gezogenen Linie gleich der Summe des Quadrats der halben zweyten Axe und ihres Stücks zwischen der gezogenen Linie und dem Mittelpunkt.

Satz 10. (Sims. 9 S.) Fig. 4.

Jede gerade, beyderseits von einer Hyperbel, oder von entgegengesetzten Hyperbeln begränzte, und mit einer der Axen parallele Linie wird von der andern halbirt, oder: die Axen sind zugeordnete Durchmesser, oder: die gerade beyderseits von der Hyperbel begränzte, und mit einer der Axe parallele Linien sind Ordinaten der andern Axe.

1.) Es seye eine gerade Linie GJ mit der zweyten Axe Bb parallel, und begegne der Zwergaxe in D; so ist mithin $GD^2 : JD^2 = AD \times Da : AD \times Da$ (8. Satz, Zus.), mithin $GD = JD$.

2.) Es seye eine gerade Linie GO parallel mit der Zwergaxe Aa, und begegne der zweyten Axe Bb in N; so ist $GN^2 : ON^2 = BC^2 + CN^2 : BC^2 + CN^2$ (9. Satz), mithin $GN = ON$.

Satz 11. (Sims. 10. S.) Fig. 4.

Umgekehrt: eine durch eine Hyperbel oder durch entgegengesetzte Hyperbeln begränzte, und von der einen Axe halbirte gerade Linie ist parallel mit der andern.

1.) Die gerade Linie GJ werde von der Zwergaxe Aa in D halbirt, und man ziehe die Linien GN, JP parallel mit der Zwergaxe, und diese begegnen der zweyten (zugeordneten) Axe in N, P. Weil nun GD = DJ, so ist auch CN = CP. Aber $GN^2 : JP^2 = CB^2 + CN^2 : CB^2 + CP^2$ (9. Satz, 1. Zus.) mithin ist GN = JP, aber diese Linien sind auch parallel, folglich sind GJ, NP parallel (33, I. E.)

2.) Es werde GO von der zweyten Axe in N halbirt, und man ziehe parallel mit der zweyten Axe die Linien GD, OQ, die der Zwergaxe in D, Q begegnen. Weil nun GN = NO; so ist DC = CQ, mithin DA = Qa. Es ist aber $GD^2 : OQ^2 = AD \times Da : AQ \times Qa$ (8. Satz, Zus.). Aber $AD \times Da = AQ \times Qa$, mithin GD = OQ, diese Linien sind aber auch parallel, mithin sind GO, DQ parallel.

Zus. (Sims. 3.) Aus dem Beweise erhellt, daß gerade Linien GD, OQ, die mit der einen Axe Bb parallel sind, und auf der andern Axe Aa zwischen sich und dem Mittelpunkt gleiche Stücke CD, CQ abschneiden, unter sich gleich seyen: eben so sind die geraden Linien GN, JP gleich, die mit der Axe Aa parallel sind, und auf der andern Axe Bb gleiche Stücke CN, CP abschneiden. Und umgekehrt: wenn GD, OQ gleich und mit Bb parallel sind; so schneiden sie gleiche Stücke CD, CQ ab: eben so, wenn GN, JP gleich, und mit Aa parallel sind, so schneiden sie gleiche Stücke CN, CP ab.

Satz 12. (Simsons 11. S.) Figg. 6. 7.

Jede gerade Linie DC, die senkrecht auf der Zwergaxe Aa steht, so daß sie auf ihre über die Scheitel hinaus gemachte Verlängerung trift, begegnet der Hyperbel in 2 Punkten, (aber nicht in mehrern).

1.) Es seye Aa die Zwergaxe, E, F die Brennpunkte, das Perpendikel begegne der Zwergaxe in C, man mache CG = CF nemlich gleich der Entfernung des Punkts C von dem ihm am nächsten liegenden Brennpunkt F, und aus dem andern Brenn-

punkt

punkt E mache man EK gleich der Zwergaxe Aa. Wenn nun Fig. 6. der Punkt C unterhalb des Brennpunkts F fällt, so ist für sich klar, daß EK < EG seye. Fällt aber Fig. 7. der Punkt C oberhalb F; so ist, weil Aa = EK, AK = aE = AF; nach der Voraussetzung aber ist FC < FA, mithin 2FC < 2FA, d. h. FG < FK, mithin EK < EG. Man nehme nun eine Linie EH, so daß EK : EF = EG : EH. Weil nun EK < EF und auch < EG, mithin um so vielmehr < EH; so ist EK + EH > EF + EG (25, V. E.), folglich, wenn man beyderseits 2EK hinwegnimmt, so ist KH > KF + KG d. i. > 2KC, weil nemlich CF = CG. Theilt man daher KH in L in 2 gleiche Theile, so ist KL > KC, folglich fällt der Punkt L unterhalb der Linie CD, und ein aus dem Mittelpunkt E mit dem Halbmesser EL beschriebener Kreis begegnet ihr nothwendig in 2 Punkten D, d. Man beschreibe nun aus dem Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DF einen andern Kreis, der durch G gehen wird. Dieser begegne der geraden Linie DE in den Punkten M, N. Weil nun EK : EF = EG : EH; so ist HE × EK = FE × EG, d. i. wegen des Kreises = ME × EN. Da nun ED = EL; so ist auch $ED^2 = EL^2$. Zieht man von diesen gleichen Quadraten die gleiche Rechtecke ME × EN, HE × EK ab; so sind die Reste, nemlich (6, II. E.) MD^2 oder DF^2, und KL^2 gleich, folglich ist DM = KL, und nimmt man diese von den gleichen Linien ED, EL weg, so bleibt der Rest EM = dem Rest KE oder der Zwergaxe Aa. Es ist aber EM der Ueberschuß von DE über DF, mithin liegt der Punkt D auf der Hyperbel (2ter Satz) und eben so wird gezeigt, daß der Punkt d darauf liege.

(2.) Nimmt man hingegen auf der über D oder d hinaus verlängerten Linie Dd einen Punkt O an, so liegt dieser ausserhalb der Hyperbel. Denn man ziehe die Linien FO, EO; so ist (12, II. oder 13, II. E.) $EO^2 - FO^2 = Ed^2 - Fd^2$, oder (EO + FO) . (EO — FO) = (Ed + Fd) (Ed — Fd), mithin EO + FO : Ed + Fd = Ed — Fd : EO — FO. Da nun sowohl EO > Ed, als FO > Fd; so ist EO + FO > Ed + Fd, mithin Ed — Fd > EO — FO

d. i. $Aa > EO - FO$, folglich O ausserhalb der Hyperbel (3. Satz). Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß jeder Punkt P der Linie Dd, der zwischen D und d liegt, innerhalb der Hyperbel seye.)

1. Zus. Zieht man hingegen aus einem Punkt Q der Zwergaxe Aa selbst eine Linie senkrecht auf dieselbe, so begegnet diese keiner der entgegengesetzten Hyperbeln. Denn, wenn Q der Mittelpunkt der Hyperbel ist, so ist jeder Punkt R der Linie QR von den Brennpunkten E, F gleich weit entfernt, oder $ER - FR = o$ mithin $< Aa$, folglich liegt R ausser den entgegengesetzten Hyperbeln. (Die zweyte oder zugeordnete Axe begegnet also der Hyperbel nirgends, und heißt nur nach der Analogie der Ellipse so.) Liegt hingegen Q näher bei dem einen Brennpunk z. B. bey F; so ist $ER^2 - FR^2 = EQ^2 - FQ^2$ mithin $ER + FR : EQ + FQ = EQ - FQ : ER - FR$. Da nun $ER + FR > EQ + FQ$; so ist auch $EQ - FQ > ER - FR$, mithin noch vielmehr $Aa > ER - FR$, folglich R ausserhalb der Hyperbel.

2. Zus. Die Hyperbel ist keine in sich selbst zurückkehrende Linie, sondern sie besteht aus 2 gleichen und ähnlichen aber von einander abgesonderten Schenkeln, von welchen jeder sich auf gleiche Weise ins Unendliche erstreckt, so daß jeder Punkt eines solchen Schenkels näher bey dem seinem Scheitel benachbarten Brennpunkt als bey dem andern liegt.

3. Zus. Der obige 8te Satz gilt auch umgekehrt. Nemlich, wenn man Fig. 4. aus einem Punkt D der über ihre Scheitel hinaus verlängerten Zwergaxe Aa ein Perpendikel GD auf dieselbe errichtet, und wenn das Quadrat dieses Perpendikels GD sich zu dem Rechteck $AD \times Da$ zwischen den Scheiteln der Zwergaxe und der Linie GD verhält, wie das Quadrat der zweyten Axe Bb zu dem Quadrat der Zwergaxe; so liegt der Punkt G auf der Hyperbel. Denn gesetzt, er liege nicht darauf, so müßte GD der Hyperbel auf eben der Seite von Aa in einem andern Punkt R begegnen (12. Satz), mithin wäre dann (8. Satz) $DR^2 : AD \times DA = Bb^2 : Aa^2 = DG^2 : AD \times Da$ (nach der

Voraussetzung), mithin müßte dann $DR = DG$ seyn, was unmöglich ist.

Satz 13. Fig. 8.

Jede gerade Linie OQ, die in einem beliebigen Punkt Q senkrecht auf der zweyten Axe Bb steht, begegnet den 2 entgegengesetzten Hyperbeln in 2 Punkten, aber nicht in mehrern.

1.) Man nehme auf OQ die Linie $QH =$ der halben zweyten Axe Cb, ziehe CH, mache $CL = CH$, ziehe Ab, und damit parallel durch L die Linie LD, die der Zwergaxe in D begegne, endlich durch D die Linie DG parallel mit Cb, die der Linie OQ in G begegne, nehme dann $Qg = QG$; so werden die Punkte G, g auf den entgegengesetzten Hyperbeln liegen. Man ziehe noch gd parallel mit GD an die Zwergaxe; so ist $\left.\begin{matrix}CL\\CH\end{matrix}\right\}: CD = Cb : CA$, mithin CH^2 oder $CQ^2 + Cb^2 : CD^2 = Cb^2 : CA^2$, folglich, weil $CQ = GD = gd$ ist: $GD^2 : CD^2 - CA^2 = Cb^2 : CA^2$ d. i. (5. II. E.) $GD^2 : AD \times Da = Cb^2 : CA^2$, folglich liegt der Punkt G auf der Hyperbel (12. Satz, 3. Zus.). Und eben so wirds von dem Punkt g bewiesen.

2.) Aber ausser den Punkten G, g kann kein anderer Punkt O der Linie OQ auf einer der Hyperbeln liegen. Denn gesetzt, diß wäre möglich; so ziehe man an die Zwergaxe OS parallel mit GD; so müßte $OS^2 : GD^2 = AS \times Sa : AD \times Da$ seyn (8. Satz, Zus.). Da nun $OS = GD$; so müßte $AS \times Sa = AD \times Da$ seyn, was unmöglich ist.

11te Erklär. (Simſ. 10te) Fig. 9.

Wenn man durch den Scheitel der Zwergaxe eine gerade Linie parallel und gleich der zweyten Axe so zieht, daß sie von der Zwergaxe halbirt wird; so heißen die durch den Mittelpunkt der Hyperbel und durch die Endpunkte dieser Parallellinien gezogenen Linien Asymptoten.

1. Zus. Simſ. 1. 3.) Entgegengesetzte Hyperbeln haben einerley Asymptoten. Denn es seyen CD, CE die Asymptoten der Hyperbel AF, und durch den Scheitel A der Zwergaxe seye DAE

parallel mit der zweyten Axe Bb, und eben so durch den andern Scheitel a dae parallel mit DE gezogen. Weil nun CD, CE Asymptoten sind; so ist sowohl DA, als ae gleich und parallel mit der halben zweyten Axe CB, und weil DE, de parallel, und CA, Ca gleich sind; so sind ad, ae mit AD, AE folglich mit der halben zweyten Axe gleich und parallel, mithin sind Cd, Ce Asymptoten der entgegengesetzten Hyperbel a.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Die Asymptoten CE, CD sind parallel mit den geraden Linien AB, Ab, welche die Endpunkte der Axe verbinden (33. I. E.)

3. Zus. Die Zwergaxe theilt den Asymptotenwinkel DCE (den Winkel der Asymptoten, innerhalb dessen die Hyperbel liegt) in 2 gleiche Theile, und eben so die zweyte Axe seinen Nebenwinkel ECd. Der Asymptotenwinkel ist ein rechter Winkel in der gleichseitigen Hyperbel; er ist in andern Hyperbeln spitzig, wenn die zweyte Axe kleiner ist als die Zwergaxe, hingegen stumpf, wenn die kleine Axe grösser ist als die Zwergaxe.

4. Zus. Das Parallelogramm (2. Zus.) ANCQ, das die Linien AB, Ab mit den Asymptoten bilden, und das man die Potenz der Hyperbel nennt, ist im Allgemeinen ein Rhombus, und in einer gleichseitigen Hyperbel ein Quadrat, und immer dem 8ten Theil des Rechtecks der beyden Axen, oder bey der gleichseitigen Hyperbel dem 8ten Theil des Quadrats einer Axe gleich. Denn da (3. Zus.) AC den Winkel QCN, mithin auch den gleichen ihm gegenüberstehenden Winkel QAN halbirt; so ist QA = QC, CN = AN. Aber auch QC = AN (34. I. E.), folglich QA = QC = CN = AN. Und da die Winkel QDA, QAD als Ergänzungen gleicher Winkel zu einem rechten gleich sind, so ist auch QD = QA = QC, und eben so EN = NA = NC. Mithin der Rhombus ANCQ = der Hälfte des Dreyecks DCE $= \frac{1}{4} AC \times DE = \frac{1}{8} Aa \times DE$ oder $= \frac{1}{8} Aa \times Bb$. Hingegen das Rechteck aus den Seiten dieses Rhombus ist $= DQ^2 = \frac{1}{4} DC^2$ $= \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2) = \frac{1}{16}(Aa^2 + Bb^2)$.

Satz 14. (Simsons 12. S.) Fig. 9.

Die Asymptoten treffen mit der Hyperbel nie zusammen.

Es seye dieselbe Verzeichnung, wie vorhin, und es treffe, wenns möglich ist, eine Asymptote CD mit der Hyperbel in einem Punkt F zusammen, und man ziehe durch F eine Linie FG parallel mit DA, die der Axe Aa in G begegne, und weil das Rechteck $AG \times Ga : GF^2 = CA^2 : \begin{cases} CB^2 \\ AD^2 \end{cases} = CG^2 : GF^2$; so ist Rechteck $AG \times GA = CG^2$, was unmöglich ist (6, II. C.), mithin kann die Hyperbel mit der Asymptote nicht in F zusammentreffen, und eben so wird bewiesen, daß es in keinem andern Punkt möglich seye.

Zus. Noch viel weniger können gerade Linien, die durch den Mittelpunkt der Hyperbel innerhalb eines von den Nebenwinkeln des Asymptotenwinkels gehen, der Hyperbel begegnen.

Satz 15 (Simsons 13. S.) Fig. 9.

Wenn man durch einen Punkt F einer Hyperbel eine gerade Linie KFL parallel mit der zweyten Axe zieht, die den Asymptoten in K, L begegnet; so ist das Rechteck KFL der geraden Linien, die zwischen F und den Asymptoten liegen, gleich dem Quadrat der halben zweyten Axe CB.

KL begegne der Zwergaxe in G, und es seye auch die übrige Verzeichnung, wie vorhin; so sind AD, AE gleich und parallel mit der halben zweyten Axe BC. Man ziehe an die zweyte Axe FM parallel mit CA; so ist (9. Satz) BC^2 oder $AD^2 : CA^2 = CB^2 + CM^2 : \begin{cases} FM^2 \\ GC^2 \end{cases}$. Aber auch $AD^2 : CA^2 = KG^2 : GC^2$, mithin $CB^2 + CM^2 = KG^2$. Man nehme die gleiche Quadrate von CM, FG hinweg, so bleibt, da $GK = GL$, übrig $CB^2 = KF \times FL$ (5, II. E.) Eben so ist, wenn KL der Hyperbel wieder in H begegnet, $KH \times HL = CB^2$.

Zus. (Simſ. Zus.) Wenn daher eine gerade, durch die Asymptoten begränzte Linie KL parallel ist mit der zweyten Axe,

und man auf ihr einen Punkt F nimmt, so daß daß KF × FL = dem Quadrat der halben Axe CB; so liegt F auf der Hyperbel.

Satz 16. Fig. 9.

Wenn man durch einen Punkt f einer Hyperbel eine gerade Linie fkl parallel mit der Zwergaxe zieht, die den Asymptoten in k, l begegnet, so ist das Rechteck kfl der geraden Linien, die zwischen dem Punkt f und den Asymptoten liegen, gleich dem Quadrat der halben Zwergaxe CA.

Die Linie fl begegne der zweyten Axe in m, und es bleibe die vorige Verzeichnung; so ist, wie aus 11. Erkl. 3. Zus. erhellet, km = ml, und wegen der ähnlichen Dreyecke KCm, CDA ist $km^2 : Cm^2 = AC^2 : \begin{cases} AD^2 \\ CB^2 \end{cases}$, mithin $km^2 + AC^2 : Cm^2 + CB^2 = AC^2 : CB^2 = fm^2 : Cm^2 + CB^2$ (9. Satz). Mithin ist $km^2 + AC^2 = fm^2$, folglich, wenn man beyderseits km^2 abzieht, $AC^2 = kf \times fl$ (5. II. E.) Eben so, da fl der Hyperbel wieder in einem Punkt h begegnet, ist $kh \times hl = AC^2$.

Zus. Wenn daher eine gerade durch die Asymptoten begränzte gerade Linie kl mit der Zwergaxe parallel ist, und man auf ihrer Verlängerung einen Punkt f nimmt, so daß kf × fl = dem Quadrat der halben Zwergaxe ist; so liegt f auf der Hyperbel.

Satz 17. (Simsons 14. S.) Fig. 10.

Wenn eine gerade Linie AB einer Hyperbel, oder entgegengesetzten Hyperbeln in 2 Punkten A, B begegnet, und mit den Asymptoten in den Punkten C, D zusammentrift; so sind die Rechtecke CAD, CBD, der Linien, die zwischen den Asymptoten und der Hyperbel liegen, unter sich gleich, und auch die gerade Linien CA, BD, die auf beyden Seiten zwischen der Hyperbel und einer Asymptote liegen, sind gleich.

Man ziehe durch die Punkte A, B gerade Linien mit der zweyten Axe parallel, die den Asymptoten in E, F und in G, H begegnen: und weil (vorhergeh. Satz) sowohl EAF als GBH gleich ist dem Quadrat der halben zweyten Axe; so sind diese Rechtecke unter sich gleich, mithin ist EA : GB = BH : AF. Aber wegen der

gleichwinklichten Dreyecke ist auch EA : GB = CA : CB, und BH : AF = BD : AD. Mithin ist CA : CB = BD : AD, folglich CA × AD = CB × BD, und, wenn man beiderseits das Rechteck CA × BD hinzusetzt, oder hinwegnimmt; so ist CA × AB = AB × BD, mithin CA = BD.

Zus. (Simsons 3.) Wenn man aus 2 Punkten A, L einer Hyperbel, an eine der Asymptoten KC, gerade Linien AM, LN mit der andern Asymptote parallel, und an irgend einen Punkt B der Hyperbel die gerade Linien AB, LB zieht, die der Asymptote KC in C, O begegnen; so ist CO = MN. Denn es begegnen AB, LB der andern Asymptote in den Punkten D, P, und man ziehe an die Asymptote KC die Linie BQ mit der andern parallel. Weil nun AC = BD, und OL = BP, so ist CM = QK, und ON = QK, mithin CM = ON, folglich da MO gemeinschaftlich ist, CO = MN.

Satz 18. (Simsons 15. S.) Figg. 11. nr. 1. 2.

Wenn man aus 2 Punkten A, B auf einer Hyperbel oder auf entgegengesetzten Hyperbeln zwey gerade Parallellinien CD, EF zieht, die den Asymptoten in C, D und E. F begegnen; so sind die Rechtecke aus ihren Stücken zwischen den Punkten und den Asymptoten d. h. die Rechtecke CAD, EBF gleich.

Man ziehe durch die Punkte A, B die Linien GAH, KBL parallel mit der zweyten Axe: da nun nach dem 15ten Satz jedes der Rechtecke GAH, KBL gleich ist dem Quadrat der halben zweyten Axe; so sind diese Rechtecke unter sich gleich, mithin ist GA : KB = BL : AH. Aber wegen der gleichwinklichten Dreyecke GAC, KBE ist GA : KB = CA : EB, und wegen der gleichwinklichten Dreyecke LBF, HAD ist BL : AH = BF : AD; folglich ist CA : EB = BF : AD, mithin CA × AD = EB × BF.

1. Zus. (Simsons 1. Z.) Wenn Fig. 11. nr. 2. durch den Mittelpunkt O eine Linie AOM gezogen ist, die beyden Hyperbeln begegnet, und mit EBF parallel ist; so ist das Quadrat jedes ihrer Stücke AO zwischen dem Mittelpunkt und der Hyper-

bel gleich dem Rechteck EBF. Wird eben so, wie der Satz bewiesen.

2. Zus. (Simsons 2. Z.) Jede durch den Mittelpunkt gezogene, und von den Hyperbeln begränzte gerade Linie wird mithin in dem Mittelpunkt halbirt.

3. Zus. (Simsons 3. Z.) Wenn Fig. II. n. I. die Linien CD, EF der Hyperbel oder den entgegengesetzten Hyperbeln wieder in M, N begegnen; so ist das Rechteck ACM oder ADM gleich dem Rechteck BEN oder BFN, weil nemlich AC, MD und EN, BF gleich sind.

4. Zus. (Simsons 4. Z.) Und weil (Fig. II. n. 2.) gezeigt worden ist, daß das Quadrat des halben Durchmessers MO oder AO gleich seye dem Rechteck EBF oder BEN; so ist BE : AO = AO : EN, mithin ist BN größer als 2.AO oder als AM (25, V. E.), folglich ist ein Zwerg-Durchmesser immer größer als jede damit parallel laufende durch die Hyperbel begränzte Linie.

5. Zus. (Simsons 5. Z.) Wenn man auf einer geraden, durch entgegengesetzte Hyperbeln begränzten Linie BN, die Punkte E, F so nimmt, daß jedes der beyden Rechtecke BEN, BFN gleich wird dem Quadrat des halben Durchmessers AO, der mit BN parallel ist; so liegen, wie man leicht sieht, die Punkte E, F auf den Asymptoten.

6. Zus. Umgekehrt, wenn CD parallel ist mit EF, und $CA \times AD = EB \times BF$, und A auf der Hyperbel liegt, so liegt auch B auf derselben, oder der entgegengesetzten Hyperbel. Denn, wenn die Verzeichnung bleibt, wie vorhin; so ist $CA : AG = AH : AD$, mithin $CA \times AD = AG \times AH$, und $EB : BK = BL : BF$, mithin $EB \times BF = KB \times BL$, folglich $GA \times AH = KB \times BL$. Da nun A auf der Hyperbel liegt, so ist $GA \times AH =$ dem Quadrat der halben zweyten Axe (15. Satz) mithin auch $KB \times BL =$ diesem Quadrat, folglich B auf der Hyperbel (15. Satz, Zus.)

Satz 19. (Simsons 16. S.) Figg. 12. nr. 1, 2.

Wenn man aus einem Punkt A einer Hyperbel an die Asymptoten irgend zwey Linien AC, AD und durch einen andern Punkt

B auf derselben oder der ihr entgegengesetzten Hyperbel die Linien BE, BF mit den vorigen parallel zieht; so ist das Rechteck CAD zwischen den aus dem ersten Punkt gezogenen Linien gleich dem EBF zwischen den aus dem zweyten Punkt gezogenen Linien.

Denn man ziehe durch A, B die Linien GAH, KBL parallel mit der zweyten Axe; so läßt sich wörtlich der Beweis des vorigen Satzes wiederholen.

1. Zus. Umgekehrt, wenn AC, BE und AD, BF parallel sind, und das Rechteck CAD gleich ist dem EBF, und A auf der Hyperbel liegt, so liegt auch B auf derselben oder der entgegengesetzten Hyperbel. Wird wie der 6te Zus. des vorigen Satzes bewiesen.

2. Zus. (Simsons 1. Z.) Wenn Fig. 12. nr. 2. aus 2 Punkten A, B auf einer Hyperbel oder zwey entgegengesetzten Hyperbeln an eine oder an beide Asymptoten 2 mit der andern Asymptote parallele Linien AC, und BE oder BF gezogen werden; so sind die Rechtecke aus diesen Linien, und den zwischen ihnen und dem Mittelpunkt O abgeschnittenen Stücken gleich, d. i. AC × CO = BE × EO oder = BF × FO. Denn man ergänze die Parallelogramme ACOD, BEOF; so sind die Rechtecke CA × AD, EB × BF d. i. AC × CO, BE × EO gleich.

3. Zus. (Sims. 2. Z.) Und weil Fig. 12. nr. 2. CA × AD = EB × BF; so ist AC : EB = BF : AD. Nun sind ausserdem die Parallelogramme ACOD, BEOF gleichwinklicht, mithin sind sie (14. VI. E.) unter sich, (folglich namentlich auch mit dem Parallelogramm, das die Potenz der Hyperbel heißt (11. Erkl. 4. Zus.)) gleich.

4. Zus. Umgekehrt, wenn die Rechtecke AC × CO, BE × EO oder die Parallelogramme ACOD, BEOF gleich sind, und A auf der Hyperbel liegt; so liegt auch B auf derselben oder der entgegengesetzten Hyperbel. Denn es ist alsdann AC : BE = EO : CO = BF : AD, mithin CA × AD = EB × BF, folglich nach dem 1sten Zus. auch B auf derselben oder der entgegengesetzten Hyperbel.

Satz 20. (Simsons 17. S.) Fig. 13.

Jede durch den Mittelpunkt A einer Hyperbel innerhalb des Asymptotenwinkels gezogene gerade Linie AE begegnet der Hyperbel.

Es seye AD die halbe Zwergaxe. Wenn es nun möglich ist, daß AE der Hyperbel nicht begegnet, so ziehe man durch D eine gerade Linie BDC mit der zweyten Axe parallel, die den Asymptoten in B, C begegne, auch ziehe man eine Linie DF mit AB parallel, die mit AE in F zusammenkomme, nehme BG = DF, und ziehe GF, die mithin mit BD gleich und parallel (33. I.) mithin auf der Zwergaxe senkrecht ist, und folglich die Hyperbel schneidet (12. Satz). Sie schneide sie nun auf der Seite von AD, auf welcher F liegt, in H, und begegne der andern Asymptote in K. Weil nun F ausserhalb der Hyperbel seyn soll, so müßte GH > GF d. i. > BD seyn. Aber es ist auch HK > CD, mithin müßte das Rechteck $GH \times HK > BD \times DC$, d. i. $> BD^2$ seyn. Eben diß Rechteck ist aber auch diesem Quadrat gleich (15ter Satz), was unmöglich ist. Mithin muß AE der Hyperbel nothwendig begegnen.

1. Zus. (Sims. Zus.) Wenn Fig. 11. nr. 2. aus dem Mittelpunkt O innerhalb des Asymptotenwinkels KOL eine Linie OA gezogen ist, deren Quadrat gleich ist dem Rechteck EBF aus den Stücken irgend einer geraden mit OA parallelen Linie zwischen dem Punkt B, in welchem sie der Hyperbel, und den Punkten E, F, in denen sie den Asymptoten begegnet; so liegt der Punkt A auf einer von den Hyperbeln.

Denn nach unserm Satz begegnet OA der Hyperbel nothwendig. Sollte sie ihr nun nicht in A begegnen; so begegne sie ihr, wenn uns möglich ist, in einem andern Punkt P; so ist (18. Satz, 1. Zus.) $AP^2 = EB \times BF = AO^2$, was unmöglich ist. Mithin muß der Punkt A. in der Hyperbel liegen.

2. Zus. Eben so wird bewiesen, wenn man AO über O hinaus verlängert, und $OM^2 = EB \times BF$ oder $OM = OA$ macht, daß AM der Hyperbel in M, aber in keinem andern Punkt begegnen könne. Jede durch den Mittelpunkt innerhalb

des Asymptotenwinkels gezogene Linie begegnet mithin den entgegengesetzten Hyperbeln in 2 Punkten, aber nicht in mehreren. Alle solche Linien sind mithin Zwerg-Durchmesser der Hyperbel (4. Erkl.) und da ihre Scheitel vom Mittelpunkt gleich weit abstehen; so stehen sie auch von den beyden Axen und von den Brennpunkten gleich weit ab, wie leicht aus der Betrachtung der rechtwinklichten Dreyecke erhellt, die entstehen, wenn man aus diesen Scheiteln Perpendikel auf die Axen fällt.

Satz 21.

(Simsons 18. S. bey Apollonius der 13te Satz des 2ten Buchs)

Fig. 13.

Wenn man aus irgend einem Punkt zwischen den Asymptoten AL, AM und der Hyperbel eine gerade Linie NO mit einer der Asymptoten AL parallel zieht; so begegnet sie der Hyperbel nur in einem Punkt, und geht verlängert innerhalb der Hyperbel fort.

Denn wenn es möglich ist, so begegne sie der Hyperbel nicht. Man nehme irgend einen Punkt P auf der Hyperbel, und ziehe die Linien PQ, PM parallel mit AM, AL, und mache das Rechteck ANO gleich dem MPQ, ziehe die Linie AO und verlängere sie, bis sie (vorherg. Satz) der Hyperbel in einem Punkt R begegne. Durch R ziehe man RS, RT mit AM, AL parallel; so ist $MP \times PQ = TR \times RS$ (10ter Satz). Nach der Voraussetzung aber auch $MP \times PQ = AN \times NO$, mithin ist $AN \times NO = TR \times RS = AT \times TR$, was unmöglich ist, weil $AT > AN$, und $TR > NO$. Mithin muß NO der Hyperbel begegnen. Es geschehe diß in V, ich sage, sie begegne ihr in keinem andern Punkt. Denn, wenns möglich ist, begegne sie ihr noch in einem Punkt X. Man ziehe durch V, X mit AM die Linien VY, LX parallel; so ist $NV \times VY = NX \times XL$ (19. Satz, 2. Zus.) was unmöglich ist, mithin kann NO der Hyperbel in keinem andern Punkt als V begegnen. Nimmt man endlich X gerade auf der über V hinaus verlängerten Linie NV, und zieht parallel mit AM die Linie XL, die der Asymptote AL in L, mithin nach dem

bisher Bewiesenen der Hyperbel in einem Punkt Z begegnet; so ist mithin XL × AL > VY × YA d. i. > ZL × LA, mithin XL > ZL, folglich X innerhalb der Hyperbel.

1. Zus. (Sims. 2. Z. Sein 1ster ist schon in Satz 20, 2ter Zus. enthalten). Wenn eine gerade Linie einer Hyperbel, oder entgegengesetzten Hyperbeln in 2 Punkten begegnet; so begegnet sie auch beyden Asymptoten. Denn wäre sie mit der einen von ihnen parallel, so könnte sie der Hyperbel nur in einem Punkt begegnen.

2. Zus. Keine gerade Linie begegnet der Hyperbel in mehr als 2 Punkten. Denn wenn (Fig. 10.) eine Linie AB der Hyperbel in A, B, folglich auch (vor. Zus.) den Asymptotten in 2 Punkten C, D begegnet, und es wäre möglich, daß sie der Hyperbel in einem 3ten Punkt X begegnete; so wäre (17. Satz) AC = BD = XD, was widersprechend ist.

3. Zus. (Sims. 3. Zus.) Eine gerade Linie, die die Hyperbel berührt, begegnet beiden Asmptoten. Denn wäre sie mit einer von ihnen parallel, so schnitte sie die Hyperbel, was widersprechend ist.

4. Zus. (Sims. 4. Z.) Wenn man Fig. 13. aus einem Punkt N einer Asymptote eine Linie NO mit der andern parallel zieht, und auf derselben innerhalb des Asymptotenwinkels einen Punkt V so nimmt, daß das Rechteck VN × NA gleich ist dem Rechteck PM × MA (dessen eine Seite eine aus irgend einem Punkt P der Hyperbel an eine Asymptote parallel mit der andern gezogene Linie PM, die andre aber die Abscisse MA ist, die sie auf der andern Asymptote von dem Mittelpunkt aus abschneidet); so liegt V auf der Hyperbel. Denn wäre diß nicht, so liege, wenns möglich ist, ein anderer Punkt X der Linie NO auf der Hyperbel; so wäre XN × NA = PM × MA = VN × NA, was widersprechend ist.

Satz 22. (Simsons 19. S.) Fig. 14.

Wenn man aus einem Punkt A einer Hyperbel eine gerade Linie zieht, die beyden Asymptote in B, C begegnet, und von ei-

nem der Punkte B, C z. B. von C aus eine Linie CD = BA nimmt, so daß D, A entweder beyde zu gleicher Zeit zwischen B und C, oder beyde zugleich ausserhalb BC liegen; so ist im ersten Fall D auf derselben Hyperbel, auf welcher A liegt, im andern Fall auf der ihr entgegengesetzten Hyperbel.

Es seye G der Mittelpunkt der Hyperbeln. Man ziehe durch A, D, an die eine Asymptote GB die Linien AE, DF mit der andern parallel; so ist, wegen der Parallelen, BA : DC = BE : FG. Aber BA = DC, mithin auch BE = FG, folglich BF = EG. Wegen der gleichwinklichten Drevecke aber ist AE : DF = BE : BF = FG : EG, folglich ist AE × EG = DF × FG, mithin, da A auf der Hyperbel liegt; so liegt auch D auf der Hyperbel, die GF zur Asymptote hat (21. Satz, 4. Z.)

Satz 23. (Simsons 20. S.) Fig. 14.

Wenn eine gerade Linie BC die beyde Asymptoten GB, GC in B, C so schneidet, daß sie nur durch Einen von den Nebenwinkeln des Asymptotenwinkels (des Winkels, innerhalb dessen die Hyperbeln liegen) geht; so begegnet sie jeder von den entgegengesetzten Hyperbeln nur in einem Punkt.

Man nehme auf den Hyperbeln irgend einen Punkt H, und ziehe durch denselben die Linie HJK parallel mit BC, die den Asymptoten in J, K begegne, theile BC in dem Punkt N in 2 gleiche Theile, und mache ND, NA gleich der Seite eines Quadrats, dessen Ueberschuß über das Quadrat von NC oder NB gleich seye dem Rechteck KHJ; so werden die Punkte D, A in den entgegengesetzten Hyperbeln liegen. Denn nach 6, II. E. ist BA × AC = $NA^2 - NB^2$ = KH × HJ, mithin AB : KH = HJ : AC. Zieht man nun durch A, H die gerade Linien AE, AP, und HL, HM mit den Asymptoten parallel, so ist, wegen der gleichwinklichten Drevecke AB : KH = AE : HL, und HJ : AC = HM : AP, mithin ist AE:HL = HM:AP, folglich ist EA × AP oder AE × EG = LH × HM = HL × LG, und da der Punkt H in der Hyperbel liegt; so liegt der Punkt A in eben derselben oder

der entgegengesetzten Hyperbel (21. Satz, 4. Zus.) Eben so liegt der Punkt D in der Hyperbel, die der entgegengesetzt ist, in welcher der Punkt A liegt. Und es ist klar, daß BC der Hyperbel in keinem andern Punkt begegnet.

1. Zus. (Simſ. Zus.) Wenn daher eine gerade Linie BC nur durch Einen von den Nebenwinkeln des Asymptotenwinkels geht, und in demselben die Linien BG, GC schneidet, und man nimmt auf ihrer Verlängerung einen Punkt A, so, daß das Rechteck BAC gleich wird dem Rechteck KHJ unter den Stücken irgend einer mit BC parallelen Linie zwischen dem Punkt H, in dem sie der Hyperbel, und den Punkten K, J, in denen sie den Asymptoten begegnet, oder mithin (18. Satz, 1. Zus.) gleich dem Quadrat des mit BC parallelen halben Zwerg-Durchmessers; so liegt der Punkt A in einer der Hyperbeln.

2. Zus. Jede Berührungslinie einer Hyperbel schneidet nothwendig alle Zwerg-Durchmesser derselben. Denn könnte sie mit einem derselben parallel seyn, so müßte sie, da dieser die beyde Asymptoten in dem Mittelpunkt schneidet, und innerhalb des Asymptotenwinkels durchgeht, sie ebenfalls schneiden, so, daß sie nur durch Einen Nebenwinkel des Asymptotenwinkels gienge, folglich würde sie die Hyperbel schneiden, was widersprechend ist.

Satz 24. (Simſ. 21. S.) Fig. 12. nr. 2.

Wenn eine gerade Linie GH beyde Asymptoten KO, LO so schneidet, daß sie nur durch Einen von den Asymptotenwinkeln geht, und wenn das Quadrat ihrer Hälfte nicht kleiner ist, als das Rechteck KM × ML aus den Stücken irgend einer durch einen beliebigen Punkt M der Hyperbel parallel mit GH gezogenen Linie zwischen der Hyperbel und den Asymptoten; so begegnet GH einer der Hyperbeln in 2 Punkten.

Man theile die Linie GH in dem Punkt P in 2 gleiche Theile, und nehme PA, Pa gleich der Seite eines Quadrats, das kleiner seye, als das Quadrat von PG um das Rechteck KM × ML; so werden die Punkte A, a in der Hyperbel liegen. Denn es ist

$GA \times AH = GP^2 - AP^2$ (5, II. E.) $= KM \times ML$. Zieht man nun durch A, M die Linien AC, MN mit den Asymptoten parallel; so wird, wie beym vorigen Satz gezeigt, daß $AC \times CO = MN \times NO$ seye. Da nun M auf der Hyperbel liegt, so liegt auch A darauf. Und eben so wird es von dem andern Punkt a gezeigt. Ist aber $GP^2 = KM \times ML$; so liegt allein der Punkt P auf der Hyperbel.

Zus. (Simſ. Zus.) Wenn daher eine gerade Linie GH nur durch Einen von den Asymptotenwinkeln geht, und die Asymptoten OK, OL schneidet, und man auf derselben einen Punkt A so nimmt, daß das Rechteck GAH gleich wird dem Rechteck KML, aus den Stücken irgend einer durch einen beliebigen Punkt M der Hyperbel parallel mit GH gezogenen Linie zwischen der Hyperbel und den Asymptoten; so liegt A auf einer der Hyperbeln.

Satz 25.

(Simsons 22. S. bey Apollonius der 14te Satz des 2ten Buchs)

Fig. 15.

Wenn man eine Hyperbel und ihre Asymptoten AC, AB unendlich weit verlängert denkt; so nähern sich die Asymptoten der Hyperbel immer mehr, bis auf eine Entfernung, die kleiner ist, als jede noch so kleine gegebene Größe D.

Es seyen E, F zwey Punkte in einer Hyperbel, und man ziehe durch dieselbe die Linien GEH, CFL, unter sich parallel, die den Asymptoten in G, H und C, L begegnen, und ziehe AE, die der Linie CL in K begegnet. Weil nun $GE \times EH = CF \times FL$ (18. Satz); so ist $LF : HE = GE : FC$, aber $LF > HE$, weil schon $KL > HE$, mithin ist auch $GE > FC$. Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß die weiter folgenden Linien noch kleiner seyen. Man nehme daher eine Linie GM kleiner als D, und ziehe durch M die Linie MN parallel mit AC; so wird MN der Hyperbel begegnen (21. Satz). Es geschehe diß in N, und man ziehe durch N die Linie QNB parallel mit GH; so ist $ON = GM$, mithin $ON < D$. (Um so vielmehr ist dann, wenn man aus N ein Per-

pendikel auf die Asymptote fällt, das eigentlich ihre Entfernung von dem Punkt N bestimmt, diß kleiner als D.)

Satz 26. (Simſ. 23 S.) Fig. 16.

Wenn eine gerade von den Asymptoten AB, AC begränzte Linie BC einer Hyperbel in einem Punkt D begegnet, und in diesem Punkt halbirt wird; so berührt sie die Hyperbel: umgekehrt, wenn sie die Hyperbel berührt; so wird sie in dem Berührungspunkt halbirt.

1.) Man ziehe durch D eine Linie DE parallel mit der einen Asymptote AC, die der andern in E begegne, und nehme auf BC irgend einen andern Punkt G, und ziehe durch denselben GH parallel mit DE, und GH begegne der Hyperbel in F (21. Satz). Weil nun BD = DC; so ist BE = EA, und wegen der gleichwinklichten Dreyecke ist BE : ED = BH : HG, folglich (1, VI. E.) BE × EA : DE × EA = BH × HA : GH × HA. Aber BE × EA > BH × HA (5, II. E.); folglich ist DE × EA > GH × HA, d. i. FH × HA > GH × HA, mithin ist FH > GH, folglich der Punkt G ausserhalb der Hyperbel, mithin berührt BC die Hyperbel in D.

Anderer Beweis.

Es seye die durch die Asymptoten begränzte Linie LM in dem Punkt, in dem sie der Hyberbel begegnet, halbirt; so berührt sie sie in diesem Punkt. LD kann nemlich nicht in den Raum innerhalb der Hyperbel sich hinein erstrecken. Denn, wenn diß wäre, so müßte sie nothwendig der Hyperbel noch in einem andern Punkt N begegnen, weil nemlich die Punkte L, M ausserhalb der Hyperbel liegen. Sie kann ihr aber in keinem solchen Punkt N begegnen, denn sonst müßte NM = DL (17. Satz) d. h. nach der Voraussetzung = DM seyn, was ungereimt ist, mithin berührt sie die Hyperbel in D.

2.) Umgekehrt, wenn LM die Hyperbel in D berührt; so ist LD = DM. Denn, wären diese Linien ungleich, so nehme man von der größern DM ein Stück MN = DL weg; so liegt N in der

Hyper-

Hyperbel (21. Satz) mithin schneidet LM die Hyperbel gegen die Voraussetzung.

1. Zus. (Simſ. 1. Zus.) Durch einen Punkt D einer Hyperbel kann man daher nur eine einzige Berührungslinie ziehen. Es seye ein Punkt in der Hyperbel D, man ziehe durch denselben an die Asymptote AB eine Linie DE mit der andern parallel, und nehme EB = EA, ziehe BD, die der andern Asymptote in C begegne. Weil nun BE = EA, so ist BD = DC, mithin berührt BC die Hyperbel in D. Aber keine andere Linie außer BC kann sie in D berühren. Denn, wenn es möglich ist, so berühre sie auch die Linie LDM. Weil nun BE = EA, so sind LE, EA ungleich, mithin auch LD, DM ungleich, folglich berührt LM die Hyperbel nicht.

2. Zus. (Simſ. 2. Z.) Hieraus erhellet, wie man, wenn die Asymptoten AB, AC einer Hyperbel gegeben sind, eine gerade Linie ziehen kann, die sie in einem gegebenen Punkt D berühre.

3. Zus. (Simſ. 3. Z.) Wenn man Fig. 17. durch die Scheitel O, P eines Zwerg-Durchmessers PCO zwey gerade Linien AOB, QPR zieht, die die entgegengesetzte Hyperbeln in P, O berühren; so sind die Linien AB, QR parallel. Denn man ziehe an eine der Asymptoten AC die gerade Linien OS, PT mit der andern parallel; so sind die Dreyecke SCO, CTP gleichwinklicht, und, weil AO = OB; so ist AS = SC. Eben so ist auch QT = TC, und es ist CO : CP = CS : CT = CA : CQ; folglich sind die Dreyecke OCA, PCQ gleichwinklicht, mithin OA, PQ parallel.

4. Zus. (Simſ. 4. Zus.) Und wenn man eine Linie parallel mit einer Berührungslinie so zieht, daß sie der Hyperbel begegnet; so ist das Quadrat des Stücks der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote gleich dem Rechteck aus den Stücken der Parallellinie zwischen der Hyperbel und den Asymptoten. Denn diß Rechteck ist gleich dem Rechteck aus den Stücken der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkt und den Asymptoten (18. Satz) d. h. gleich dem erwähnten Quadrat.

Satz 27. (Simſ. 24. S.) Aufgabe. Fig. 16.

Wenn die Aſymptoten AB, AC einer Hyperbel, und auf derſelben ein Punkt F gegeben iſt, eine gerade Linie zu ziehen, die die Hyperbel berühre und parallel ſeye mit einer der Lage nach gegebenen Linie KO, welche beyde Aſymptoten der Hyperbel oder der entgegengeſetzten Hyperbel in K, O ſchneidet.

Analyſe.

Geſetzt es ſeye geſchehen, und BC ſeye parallel mit KO, und berühre die Hyperbel in D. Man ziehe AD, und ſie begegne der Linie KO in P, und man ziehe durch den Punkt F die Linie FRQ parallel mit AD, und es begegne FQ den Aſymptoten in Q, R. Weil nun BC die Hyperbel in D berührt; ſo iſt BD = DC (26. Satz), mithin auch KP = PO. Nun iſt KO der Lage und Größe nach gegeben, folglich iſt KP und der Punkt P gegeben, aber auch der Punkt A, mithin iſt die Linie PAD der Lage nach gegeben. Es iſt aber $AD^2 = QF \times FR$ (18. Satz, 1. Zuſ.). Und da die Linie FRQ die durch einen gegebenen Punkt F mit der der Lage nach gegebenen AD parallel lauft, der Lage nach gegeben iſt (31. D.), und auch die Linien AB, AC der Lage nach gegeben ſind; ſo ſind FQ, FR gegeben (28. 29. D.): folglich iſt das Rechteck $QF \times FR$, mithin das Quadrat von AD, folglich AD ſelbſt, und da der Punkt A gegeben iſt, auch der Punkt D gegeben (30. D.), mithin iſt BDC der Lage nach gegeben (31. D.)

Kompoſition.

Man theile KO in P in 2 gleiche Theile, ziehe AP, und damit durch den Punkt F die Linie FQR gleichlaufend, die den Aſymptoten in R, Q begegne, auf der nach beyden Seiten verlängerten Linie AP nehme man AD = der mittlern Proportionallinie zwiſchen FQ, FR, und ziehe durch D die Linie BDC parallel mit KO, ſo wird BC die Hyperbel in D berühren. Denn, weil $AD^2 = QF \times FR$; ſo liegt D auf der Hyberbel (20. Satz, 1. Zuſ.) und da KO, BC parallel ſind, und KO in P halbirt iſt; ſo iſt auch BC in D halbirt, und berührt folglich die Hyperbel in D (26. Satz).

Satz 28. (Simsons 25. S.) Fig. 18.

Wenn eine gerade Linie GE eine Hyperbel in einem Punkt F berührt, (folglich (21. Satz, 3. Zus.) beyden Asymptoten in E, G begegnet); so ist das Rechteck GAE der Stücke, die sie von den Asymptoten AB, AD von dem Mittelpunkt an gerechnet, abschneidet, gleich dem Rechteck BAD der Stücke, die irgend eine andere durch einen Punkt C an die Hyperbel gezogene Berührungslinie von den Asymptoten abschneidet.

Denn man ziehe durch die Punkte C, F die gerade Linien CH, CK, und FL, FM parallel mit den Asymptoten; so ist, weil BCD die Hyperbel berührt, BC = CD (26. Satz), mithin BH = 2AH, und AD = 2.HC, folglich ist BA × AD = 4AH × HC. Eben so wird bewiesen, daß EA × AG = 4FM × MA seye. Es ist aber CH × HA = FM × MA (19. Satz), mithin ist BA × AD = EA × AG.

1. Zus. Namentlich ist jedes solches Rechteck gleich dem Quadrat des Stücks, das eine im Scheitel der Zwergaxe gezogene Tangente von einer Asymptote vom Mittelpunkt an abschneidet, d. h. dem Quadrat der Entfernung eines Brennpunkts vom Mittelpunkt, oder der Summe der Quadrate der halben Zwerg- und der halben zweyten Axe.

2. Zus. Da BA : AE = AG : AD; so sind mithin auch die Dreyecke DBA, GAE gleich, (15. VI. E.), namentlich ist jedes dieser Dreyecke gleich dem von der Berührungslinie im Scheitel der Zwergaxe zwischen den Asymptoten abgeschnittenen Dreyeck, d. i. gleich der doppelten Potenz der Hyperbel oder gleich dem Rechteck aus der halben Zwerg- und der halben zweyten Axe.

Satz 29. (Simsons 26. S.) Fig. 18.

Wenn zwey gerade Linien BD, GE eine Hyperbel, oder entgegengesetzte Hyperbeln in C, F berühren, und den Asymptoten AB, AD in B, D und G, E begegnen; so sind die Linien GD, BE unter sich und mit der die Berührungspunkte der Hyperbel verbindenden geraden Linie CF parallel.

Denn weil (28. Satz) BA × AD = EA × AG; so ist BA : AE = AG : AD; mithin sind BE, GD parallel. Man ziehe DF, und sie begegne der Linie BE in N. Weil nun DF : FN = GF : FE = DC : CB (26. Satz); so sind BN, CF parallel.

Zus. (Sims. 3.) Hieraus folgt, daß die Stücke zweyer Berührungslinien zwischen den Asymptoten in dem Punkt O, in welchem sie einander begegnen, und den Berührungspunkten C, F proportionirt getheilt werden.

Satz 30. (Simsons 27. S.) Fig. 17.

Jede gerade Linie CE, die durch den Mittelpunkt C einer Hyperbel innerhalb eines Winkels ACR, der der Nebenwinkel von dem Asymptotenwinkel ACB ist, gezogen wird, ist ein Neben-Durchmesser der Hyperbel.

Man nehme auf der verlängerten Linie BC irgend einen Punkt D, und ziehe durch denselben an CE eine gerade Linie DF parallel mit der Asymptote AC, mache DG = DC, ziehe GF, die mit AC in H zusammentreffe. Weil nun GH den Linien CR, CA begegnet, die den Nebenwinkel des Asymptotenwinkels ACB bilden, so begegnet sie nothwendig den entgegengesetzten Hyperbeln. Es geschehe diß in K, L; so sind KH, LG gleich (17. Satz). Da aber auch CD, DG gleich, und CH, DF parallel sind, so sind HF, FG, mithin auch FK, FL gleich, folglich ist CF ein Neben-Durchmesser (4. Erklär.).

12te Erkl. (Sims. 11. E.)

Eine gerade, durch den Mittelpunkt einer Hyperbel parallel mit einer Tangente der Hyperbel gezogene, und den Stücken der Tangente zwischen den Asymptoten gleiche Linie, die in dem Mittelpunkt halbirt wird, heißt ein zweyter Durchmesser in Bezug auf den Zwerg-Durchmesser, der durch den Berührungspunkt geht. (Hieraus erhellet von selbst, wie man für jeden gegebenen Zwerg-Durchmesser seinen zweyten Durchmesser ziehen kann.)

1. Zus. (Sims. 1. Z.) Jeder zweyte Durchmesser ist mit-

hin immer auch ein Nebendurchmesser, weil er nemlich durch den Nebenwinkel des Asymptotenwinkels geht.

2. Zus. (Simſ. 2. Z.) Daher ist (Fig. 17.) eine gerade Linie MO, oder NO, welche die Scheitelpunkte M, O, oder N, O eines Zwerg-Durchmessers CO, und seines zweyten Durchmessers MN verbindet, immer mit einer Asymptote BC, oder AC parallel (33. I. E. und obige 12. E.)

3. Zus. In einer gleichseitigen Hyperbel ist jeder zweyte Durchmesser mit dem ihm zugehörigen Zwerg-Durchmesser gleich gros. Denn es seye Fig. 16. irgend ein halber Zwerg-Durchmesser AD, und BDC berühre die Hyperbel in D. Durch D seye DE parallel mit AC gezogen; so ist BE : EA = BD : DC, mithin (26. Satz) BE = EA. Ist nun die Hyperbel gleichseitig; so ist (11. Erkl. 3. Zus.) der Asymptotenwinkel, mithin auch der Winkel DEA ein rechter, folglich ist 4. I. E. AD = DB = dem halben zweyten oder Neben-Durchmesser.

13te Erklär. (Simſ. 12. E.)

Die 3te Proportionallinie zu Durchmessern, wovon der eine ein Zwerg-Durchmesser, der andere der ihm zugehörige zweyte Durchmesser ist, heißt der Parameter desjenigen unter den beyden Durchmessern, der die erste von den drey Proportionallinien ist.

1. Zus. Wenn ein Zwerg-Durchmesser einer Hyperbel D, der ihm zugehörige zweyte Durchmesser d, der Parameter des 1sten P, des zweyten p heißt; so ist, weil $D : d = d : P$, $D : P = D^2 : d^2$, und eben so, weil $d : D = D : p$; so ist $d : p = d^2 : D^2$ (20, VI. E.), mithin auch $D : P = p : d$, folglich $D \times d = P \times p$.

2. Zus. Ein Perpendikel auf die Zwergaxe durch den Brennpunkt, das mithin der Hyperbel in 2 Punkten begegnet (12. Satz) die gleichweit von dem Brennpunkt entfernt sind (10. Satz) ist, zwischen diesen 2 Punkten der Hyperbel, gleich dem Parameter der Zwergaxe (der auch der Hauptparameter der Hyperbel heißt).

Denn nach dem 8ten Satz verhält sich das Quadrat der Zwergaxe zu dem Quadrat der zweyten Axe, wie das Rechteck zwischen

den Scheiteln der Zwergaxe und dem Brennpunkt, zu dem Quadrat dieses halben Perpendikels d. h. (4. Satz) wie das Quadrat der zweyten Axe zu dem Quadrat des ganzen Perpendikels. Mithin verhält sich die Zwergaxe zu der zweyten Axe, wie die zweyte Axe zu diesem Perpendikel, welches folglich (13. Erklär.) der Parameter der Zwergaxe ist.

3. Zus. Der 8te Satz läßt sich auch noch so ausdrücken: das Quadrat eines von einem Punkt der Hyperbel auf die Zwergaxe gefällten Perpendikels verhält sich zu dem Rechteck aus den Abscissen, die es von den Scheiteln der Zwergaxe an abschneidet, wie der Parameter der Zwergaxe zu der Zwergaxe.

4. Zus. In der gleichseitigen Hyperbel ist das Quadrat eines solchen Perpendikels gleich dem Rechteck aus den erwähnten Abschnitten, weil nemlich die Zwergaxe, die zweyte Axe und die ihnen zugehörige Parameter alle unter einander gleich sind. Auch ist (12. Erkl. 3. Zus.) in der gleichseitigen Hyperbel jeder Parameter gleich einem jeden von den Durchmessern, durch die er bestimmt wird.

5. Zus. Das Quadrat eines von einem Punkt der Hyperbel G (Fig. 4.) auf die Zwergaxe gefällten Perpendikels, ist kleiner als das Rechteck zwischen dem Hauptparameter P und der von dem näher gelegenen Scheitelpunkt der Zwergaxe A an genommenen Abscisse AD, um ein Rechteck unter dem nemlichen Parameter, und der 3ten geometrischen Proportionallinie zu der Zwergaxe und der erwähnten Abscisse.

Denn $GD^2 : AD \times Da = P : Aa$ (3. Zus.)

folglich $GD^2 = \frac{P \times AD \times Da}{Aa}$. Aber $AD \times Da = Aa \times AD + AD^2$; folglich ist $GD^2 = P \times AD + P \times \frac{AD^2}{Aa}$.

Satz 31. (Simsons 28. S.) Fig. 19.

Wenn man aus einem Punkt D einer Hyperbel an einen Zwerg-Durchmesser Aa eine mit ihrem zweyten Durchmesser Bb parallele Linie DE zieht; so verhält sich das Quadrat des Zwerg-Durchmessers zu dem Quadrat des zweyten Durchmessers, wie

das Rechteck aus den Stücken des Zwerg-Durchmessers zwischen seinen Scheiteln und der gezogenen Parallele, zu dem Quadrat dieser Parallele.

CF, CG seyen die Asymptoten der Hyperbel, die Linie DE begegne ihnen in F, G, und man ziehe die Linie HAK, welche die Hyperbel in A berühre, und den Asymptoten in H, K begegne; so ist (12. Erkl.) HA gleich und parallel mit BC, mithin parallel mit FE, und wegen der gleichwinklichten Dreyecke ist $CE^2 : EF^2 = CA^2 : AH^2 = CA^2 : FD \times DG$ (26. Satz, 4. Zus.), mithin (19. V. E.) $CA^2 : AH^2 = AE \times Ea : ED^2$, folglich $Aa^2 : Bb^2 = AE \times Ea : ED^2$.

1. Zus. (Sims. 1. Zus.) Die Quadrate der geraden Linien, die aus Punkten einer Hyperbel, oder zwey entgegengesetzter Hyperbeln an einen Zwerg-Durchmesser parallel mit seinem zweyten Durchmesser gezogen werden, verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke aus den Stücken des Zwerg-Durchmessers zwischen seinen Scheiteln und den gezogenen Parallelen, wie auch bey der Ellipse gezeigt wurde.

2. Zus. (Sims. 2. 3.) Umgekehrt, wenn die Linien gezogen sind, wie vorhin, und $CA^2 : CB^2 = AE \times Ea : ED^2$; so liegt der Punkt D auf der Hyperbel. Denn weil DE parallel ist mit BC, folglich mit der durch den Scheitel der Zwergaxe gezogenen Parallele HK; so muß DE (21. Satz, 3. Zus.) nothwendig den Asymptoten, mithin der Hyperbel begegnen. Sollte sie ihr nun nicht in D begegnen; so geschehe diß, wenns möglich ist, in einem davon verschiedenen Punkt d auf eben der Seite von Aa, auf welcher D liegt; so müßte $AE \times Ea : dE^2 = CA^2 : CB^2 = AE \times Ea : DE^2$, mithin $dE = DE$ seyn, was widersprechend ist. Mithin kann die Linie DE der Hyperbel in keinem andern Punkt als D begegnen. (Wenn der Aa zugehörige Parameter P heißt; so liesse sich dieser Zus. auch noch so ausdrücken: wenn $Aa : P = AE \times Ea : CD^2$; so liegt der Punkt D auf der Hyperbel, und auf ähnliche Art der 2te Zusatz des folgenden Satzes.)

3. Zus. (Simſ. 3. Z.) Eben ſo, wie beym II. Buch 17ten Satz, 3. Zuſ. in Anſehung der Ellipſe geſchah, läßt ſich auch hier ein völlig ähnlicher 3. Zuſ. ableiten.

4. Zuſ. In einer gleichſeitigen Hyperbel iſt $AE \times Ea = ED^2$. (12. Erkl. 3. Zuſ.)

Satz 32. (Simſ. 29. S.) Fig. 19.

Wenn man aus einem Punkt D einer Hyperbel an einen zweyten Durchmeſſer Bb eine Linie DL parallel mit dem zugehörigen Zwerg-Durchmeſſer Aa zieht; ſo verhält ſich das Quadrat des zweyten Durchmeſſers Bb zu dem Quadrat des Zwerg-Durchmeſſers Aa, wie die Summe der Quadrate des halben zweyten Durchmeſſers CB, und ſeines Stücks CL zwiſchen dem Mittelpunkt C und der gezogenen Parallele DL, zu dem Quadrat von DL.

Man ziehe durch D die Linie DE mit BC parallel. Weil nun nach dem vorherg. Satz $CA^2 : CB^2 = AE \times Ea : ED_2$; ſo iſt umgekehrt, und nach 12, V. E. $CB^2 : CA^2 = CB^2 + ED^2 : CA_2 + AE \times Ea = CB^2 + CL^2 : \begin{cases} CE^2 \\ DL^2. \end{cases}$

1. Zuſ. (Simſ. 1. Zuſ.) Wenn aus 2 Punkten einer Hyperbel, oder zwey entgegengeſetzter Hyperbeln an einen zweyten Durchmeſſer zwey mit dem ihm zugehörigen Zwerg-Durchmeſſer parallele Linien gezogen werden; ſo verhält ſich das Quadrat der erſten von ihnen zu dem Quadrat der zweyten, wie die Summe der Quadrate des halben zweyten Durchmeſſers und ſeines Stücks zwiſchen dem Mittelpunkt und der erſten jener Parallelen, zu der Summe der Quadrate des halben zweyten Durchmeſſers und ſeines Stücks zwiſchen dem Mittelpunkt und der zweyten jener Parallelen.

2. Zuſ. (Simſ. 2. Z.) Umgekehrt, wenn die Linien gezogen ſind, wie vorhin, und $Bb^2 : Aa^2 = CB_2 + CL^2 : DL_2$; ſo liegt der Punkt D auf der Hyperbel. Denn weil DL parallel iſt mit dem Zwerg-Durchmeſſer AC, der zwiſchen die Aſymptoten fällt; ſo begegnet DL nothwendig den geraden Linien, die den

Nebenwinkel des Asymptotenwinkels bilden, folglich (23. Satz) jeder von den entgegengesetzten Hyperbeln, und nun wird, wie bey Zus. 2. des vorigen Satzes gezeigt, daß D auf der Hyperbel liege.

3. Zus. (Sims. 3. Z.) Auch ein dem 3ten Zusatz des vorigen Satzes ähnlicher Zusatz findet hier Statt.

4. Zus. In der gleichseitigen Hyperbel ist $CB^2 + CL^2 = DL^2$ (12. Erkl. 3. Zus.)

Satz 33. (Simsons 30. S.) Fig. 20.

Jede beyderseits von einer Hyperbel oder von entgegengesetzten Hyperbeln begränzte, und mit einem Zwerg-Durchmesser oder mit seinem zweyten Durchmesser parallele gerade Linie wird von dem andern dieser Durchmesser halbirt, und ist mithin eine ihm zugehörige Ordinate (9. Erklär.)) oder, was einerley ist, ein Zwerg-Durchmesser und sein zugehöriger zweyter Durchmesser sind zugeordnete Durchmesser.

Zus. (Sims. Zus.) Auch ist klar, daß nicht zwey Durchmesser einerley Zwerg-Durchmesser, oder einerley zweytem Durchmesser zugeordnet seyn können.

Satz 34. (Simsons 31. S.) Fig. 20.

Jede gerade von einer Hyperbel oder entgegengesetzten Hyperbeln begränzte, und von einem Zwerg-Durchmesser, oder seinem zweyten Durchmesser halbirte Linie ist parallel mit dem andern dieser Durchmesser. Ordinaten eines Durchmessers sind mithin untereinander parallel.

1. Zus. (Sims. 1. Zus.) Und gerade von einer Hyperbel begränzte Linien, welche mit einem von zwey zugeordneten Durchmessern parallel sind, und auf dem andern von dem Mittelpunkt an gleiche Stücke abschneiden, sind unter einander gleich: und wenn solche Linien unter sich gleich und mit einem von zwey zugeordneten Durchmessern parallel sind; so schneiden sie auf dem andern gleiche Stücke von dem Mittelpunkt an ab.

Diese 2 Sätze, nebst dem 1sten Zus. werden aus dem 32sten

und 33sten Satz mit eben den Worten abgeleitet, wie die Sätze 10 und 11. aus 8 und 9.

2. Zus. (Sims. 2. Z.) Wenn 2 oder mehrere gerade Parallellinien von einer Hyperbel oder von entgegengesetzten Hyperbeln begränzt werden; so halbirt ein Durchmesser, der eine von ihnen halbirt, auch die übrigen. Denn die halbirte Parallele ist parallel mit dem Durchmesser, der dem zugeordnet ist, welcher sie halbirt; mithin sind auch die übrigen Parallelen mit demselben Durchmesser parallel, und werden folglich von dem andern halbirt (33. Satz).

3. Zus. (Sims. 3. Z.) Umgekehrt: eine gerade Linie, welche zwey parallele von einer oder von entgegengesetzten Hyperbeln begränzte gerade Linie halbirt, ist ein Durchmesser. Denn wäre sie es nicht, so ziehe man einen Durchmesser, der eine von jenen Parallelen halbirt, so halbirt er auch die andere. Beyde aber sind nach der Voraussetzung auch durch eine andere gerade Linie halbirt, was widersprechend ist.

4. Zus. (Sims. 4. Z.) Eine gerade Linie, die eine mit einer Berührungslinie der Hyperbel parallele Linie in der Hyberbel halbirt, und durch den Berührungspunkt geht, ist ein Durchmesser. Denn die Parallele mit der Berührungslinie ist parallel mit dem Durchmesser, der dem zugeordnet ist, der durch den Berührungspunkt geht (12. Erkl.) Wäre nun die Linie, die diese Parallele halbirt, und durch den Berührungspunkt geht, kein Durchmesser, so ziehe man durch den Berührungspunkt einen Durchmesser; so halbirt auch dieser die mit der Berührungslinie oder mit seinem zugeordneten Durchmesser parallel gezogene Linie (33. Satz) was widersprechend ist.

5. Zus. (Sims. 5. Z.) Zwey durch eine Hyperbel oder entgegengesetzte Hyperbeln begränzte gerade Linien, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, können einander nicht halbiren. Denn wenn die Endpunkte von beyden Linien in einer Hyperbel, oder von beyden in entgegengesetzten Hyperbeln liegen; so ziehe man durch den Punkt, in welchem sich beyde gerade Linien schneiden,

einen Durchmesser; so müßten sie nach unserm Satz beyde mit dem ihm zugeordneten Durchmesser parallel seyn, was unmöglich ist. Liegen aber die Endpunkte der einen auf einer Hyperbel, die der andern auf den entgegengesetzten Hyperbeln, so ists klar, daß sie sich nicht halbiren können.

Satz 35. (Simſ. 32. S.) Fig. 19.

Eine gerade Linie HAK, die durch den Scheitel A eines Zwerg-Durchmessers Aa parallel mit seinen Ordinaten gezogen wird, berührt die Hyperbel: und umgekehrt, wenn sie sie in A berührt, so ist sie parallel mit den Ordinaten des Zwerg-Durchmessers Aa.

Denn die Ordinate des Zwerg-Durchmessers ist parallel mit seinem zweyten zugeordneten Durchmesser (34. Satz), folglich ist die durch den Scheitel A gezogene Linie mit eben diesem zugeordneten Durchmesser parallel, mithin berührt sie die Hyperbel (12. Erkl.) Umgekehrt, wenn HK die Hyperbel berührt, so ist sie mit dem Aa zugeordneten Durchmesser parallel (12. E.), aber die Ordinate DM ebenfalls, mithin sind HK, DM parallel.

Satz 36. (Simſ. 33. S.) Fig. 21.

Wenn eine gerade Linie, die eine Hyperbel berührt, einem Durchmesser begegnet, und man von dem Berührungspunkt an den Durchmesser eine Ordinate zieht; so ist der halbe Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken, welche die Ordinate und die Berührungslinie von dem Mittelpunkt an gerechnet auf ihm abschneiden.

1. Fall. Wenn die Berührungslinie einem Zwerg-Durchmesser begegnet. Es seye eine Hyperbel, die AG, AH zu Asymptoten hat. An einen Punkt derselben C ziehe man die Berührungslinie KCH, die einem Zwerg-Durchmesser BAO in E begegne; durch den Berührungspunkt C ziehe man an eben diesen Durchmesser eine Ordinate CD; so werden AD, AB, AE Proportionallinien seyn.

Man ziehe durch den Scheitel B die Linie GBF parallel mit CD,

sie begegne der Berührungslinie in N, und es seye BM parallel mit HC, und begegne AG in M, und DC begegne AH in L. Weil nun durch den Scheitel eines Durchmessers die Linie GBF parallel mit seiner Ordinate DC gezogen ist; so berührt GF die Hyperbel (35. Satz). Weil aber die Berührungslinien HK, GF in den Punkten C, B, N proportionirt getheilt werden (29. Satz, Zus.), so ist CN : NH = BN : NG, folglich, wegen der Parallelen, LF : FH = KM : KG. Weil aber KF, GH parallel sind (29. Satz); so ist FH : FA = KG : KA, folglich LF : FA = KM : KA, mithin (18, V. E.) LA : FA = MA : KA, folglich wegen der Parallelen AD : AB = AB : AE.

2. Fall. Wenn die Berührungslinie einem zweyten Durchmesser begegnet. Fig. 22. CE berühre die Hyperbel, und begegne dem zweyten Durchmesser AB in E, dem Durchmesser KAF aber, welcher dem Durchmesser AB zugeordnet ist, begegne sie in G, und man ziehe aus dem Berührungspunkt C an die Durchmesser die Ordinaten CD, CH; so sind AD, AB, AE proportional. Denn nach dem vorhergehenden Fall ist AH : AF = AF : AG, mithin $AH^2 : AF^2$ = AH : AG (Zus. 20, VI. E.), mithin (17, V. E.) $KH \times HF : AF^2$ = HG : AG. Weil aber CH eine Ordinate von AF ist; so ist $KH \times KF : AF^2$ $= \left.\begin{matrix} CH^2 \\ AD^2 \end{matrix}\right\} : AB^2$, (31. Satz) mithin ist $AD^2 : AB^2$ = HG : AG = CH : AE = AD : AE, mithin AD : AB = AB : AE (umgek. Satz des Zus. 20, VI. E.)

1. Zus. (Simſ. 1. 3.) Weil AD, AB, AE proportional sind Fig. 21.; so ist in dem Fall, wenn die Berührungslinie und die Ordinate dem Zwerg-Durchmesser BAO begegnen, DO : DB = EO : EB, d. h. die Stücke eines Durchmessers zwischen einer seiner Ordinaten und seinen Scheiteln verhalten sich unter einander, wie ihre Stücke zwischen der Berührungslinie und eben diesen Scheiteln, wie für die Ellipse II. B. 19. Satz gezeigt worden ist.

2. Zus. (Simſ. 2. 3.) Im zweyten Fall des Satzes Fig. 22.

wenn die aus dem Berührungspunkt gezogene Ordinate durch den Endpunkt eines zweyten Durchmessers geht, geht die Berührungslinie durch den andern Endpunkt desselben. Denn weil die Entfernung der Ordinate vom Mittelpunkt gleich ist dem halben zweyten Durchmesser; so ist die Entfernung der Berührungslinie vom Mittelpunkt eben diesem halben zweyten Durchmesser gleich.

Satz 37. (Simsons 34. S.) Figg. 21. 22.

Wenn man aus einem Punkt C einer Hyperbel an einen Durchmesser AB eine Ordinate CD, und die gerade Linie CE zieht, und wenn der halbe Durchmesser die mittlere Proportionallinie ist zwischen den durch diese Linien von dem Durchmesse abgeschnittenen Stücken; so berührt CE die Hyperbel.

Denn sollte CE die Hyperbel nicht berühren; so berühre sie eine andere Linie CP, mithin wären (vorh. Satz) AD, AB, AP proportional, aber nach der Voraussetzung auch AD, AB, AE, welches widersprechend ist; folglich berührt CE die Hyperbel.

Satz 38. (Simsons 35. S.) Figg. 21. 22.

Wenn 1.) Fig. 21. eine gerade Linie eine Hyperbel in einem Punkt C berührt, und einem Zwerg-Durchmesser BAO in E begegnet, und wenn man aus C an diesen Durchmesser eine halbe Ordinate zieht; so ist das Rechteck ADE aus den Stücken des Durchmessers zwischen der Ordinate und dem Mittelpunkt, und zwischen der Ordinate und der Berührungslinie gleich dem Rechteck BDO aus den Stücken zwischen der Ordinate und den Scheiteln des Durchmessers: das Rechteck AED aber aus den Stücken zwischen der Berührungslinie und dem Mittelpunkt, und zwischen der Berührungslinie und der Ordinate gleich dem Rechteck BEO aus den Stücken zwischen der Berührungslinie und den Scheiteln des Durchmessers. Wenn aber 2.) die Berührungslinie CE (Fig. 22.) einem zweyten Durchmesser in E, und die halbe aus C an diesen Durchmesser gezogene Ordinate demselben in D begegnet; so ist das Rechteck ADE aus den Stücken des Durch-

messers zwischen der Ordinate und dem Mittelpunkt und zwischen der Ordinate und der Berührungslinie gleich der Summe der Quadrate des halben Durchmessers AB, und des Stücks AD zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate: das Rechteck AED aber aus den Stücken zwischen der Berührungslinie und dem Mittelpunkt, und zwischen der Berührungslinie und der Ordinate gleich der Summe der Quadrate des halben Durchmessers AB, und des Stücks AE zwischen dem Mittelpunkt und der Berührunglinie.

1. Fall. Weil AD, AB, AE proportional sind; so ist $AD \times AE = AB^2$. Man nehme diese beyden Größen von dem Quadrat von AD hinweg; so ist $AD \times DE = BD \times DO$. Nimmt man hingegen von den beyden gleichen Größen $DA \times AE$, AB^2 beyderseits das Quadrat von AE hinweg; so bleibt das Rechteck AED gleich dem Rechteck BEO.

2. Fall. Weil das Rechteck $EAD = AB^2$; so ist, wenn man beyderseits AD^2 hinzusetzt, $AD \times DE = AB^2 + AD^2$. Setzt man hingegen beyderseits AE^2 hinzu; so ist $AE \times DE = AB^2 + AE^2$. (Auch dieser Satz läßt sich umkehren.)

Satz 39. (Simſ. 36. S.) Fig. 23.

Wenn eine gerade Linie DE eine Hyperbel in D berührt; so halbirt sie den Winkel, den gerade Linien bilden, die aus dem Berührungspunkt an die Brennpunkte F, G gezogen werden, und, umgekehrt.

1.) Es seye AB die Zwergaxe, C der Mittelpunkt der Hyperbel, DE begegne der Axe in E (23. Satz, 3. Zus.) und man fälle aus D auf die Zwergaxe das Perpendikel DH, und schneide von dem D näher gelegenen Scheitelpunkt A aus, auf der verlängerten Zwergaxe $AK = DF$ ab; so ist (1st. Satz) $KB = DG$, und (5ter Satz) $CK : CH = CF : CA$. Aber $CH : CA = CA : CE$ (36. Satz), mithin $CK : CA = CF : CE$, folglich auch (Zus. zu 19, V. El.) $CK : AK = CF : EF$, und $2.CK : AK = GF : EF$, mithin (17, V. E.) $BK : AK = GE : EF$. Es ist aber $BK = DG$, und $AK = DF$, mithin $DG : DF = GE : EF$, folglich halbirt DE den Winkel FDG (3, VI. E.)

2.) Umgekehrt, wenn DE den Winkel FDG halbirt, so berührt sie die Hyperbel. Denn wäre diß nicht; so berührte sie in dem Punkt D eine andere gerade Linie, mithin müßte diese eben sowohl als DE den Winkel halbiren, was unmöglich ist. Der Beweis hievon kann auch ganz auf eine dem 2ten Beweis des 12. Satzes im II. Buch ähnliche Art geführt werden.

1. Zus. Es erhellet hieraus von selbst, wie man an jeden Punkt einer Hyperbel, deren Zwergaxe und Brennpunkte gegeben sind, eine Berührungslinie ziehen kann.

2. Zus. Wenn eine gerade Linie JDE einer Hyperbel in D begegnet, und auf beyden Seiten des Punkts D gleiche Winkel macht, den einen EDF mit der aus D an den einen Brennpunkt gezogenen Linie, den andern JDL mit der Verlängerung der aus D an den andern Brennpunkt gezogenen; so berührt JDE die Hyperbel: umgekehrt, wenn JDE die Hyperbel berührt, so sind die Winkel EDF, JDL gleich; und wenn von 2 geraden Linien FD, LD, die gleiche Winkel mit der Berührungslinie JDE machen, die eine durch einen Brennpunkt F geht, so geht die Verlängerung der andern durch den andern Brennpunkt. (Von dieser Eigenschaft haben die Brennpunkte ihre Benennung.)

Denn 1.) wenn EDF = JDL; so ist, da auch die Scheitelwinkel JDL, GDE gleich sind, auch GDE = EDF, mithin berührt JDE nach unserm Satz Nr. 2. die Hyperbel.

2.) Umgekehrt, wenn JDE die Hyperbel berührt; so ist EDF = GDE (39. Satz Nr. 1.) = JDL; jede von LDG verschiedene Linie aber würde mit JDE einen größern oder kleinern Winkel als EDF machen.

3. Zus. Jede Berührungslinie JDE einer Hyperbel, die nicht durch einen Scheitel ihrer Zwergaxe geht, begegnet beyden Axen, namentlich fällt der Punkt, in welchem sie der Zwergaxe begegnet, zwischen den Mittelpunkt der Hyperbel, und ihren dem Berührungspunkt nähern Hauptscheitel, so daß die Entfernungen dieses Punkts von den Brennpunkten sich zu einander verhalten, wie die Entfernungen des Berührungspunkts von den Brenn-

punkten. Umgekehrt, eine gerade Linie berührt eine Hyperbel, wenn sie den Abstand der beyden Brennpunkte in Theile theilt, die sich zu einander verhalten, wie die ihnen anliegende aus dem Punkt, in dem sie der Hyperbel begegnet, an die Brennpunkte gezogene Linien.

1. Die Linie JDE begegnet der Zwergaxe in einem Punkt E (23. Satz, 2. Zus.). Und weil die Berührungslinie JDE parallel ist mit dem CD zugeordneten zweyten Durchmesser (12. Erkl. und 33. S.), dieser aber der zweyten Axe in C begegnet (12. Erkl.) so begegnet auch JDE der zweyten Axe. Und weil JDE den Winkel GDF halbirt; so ist GE : EF = GD : DF (3. VI. E.)

Da nun GD > DF (12. Satz, 2. Zus.); so ist auch GE > EF, mithin GE > $\frac{1}{2}$GF, oder > GC, folglich fällt E zwischen C und A.

2. Umgekehrt, wenn GE : EF = GD : DF; so halbirt die Linie JDE den Winkel GDF (3. VI. Z.) und berührt mithin die Hyperbel.

4. Zus. Da man (nach Zus. 1. oder nach 26. Satz 2. Zus.) durch jeden Punkt einer Hyperbel oder entgegengesetzter Hyperbeln eine Berührungslinie d. h. eine Linie ziehen kann, die ihr nur in einem Punkt begegnet, übrigens aber ganz ausserhalb der Hyperbel fällt, und da diese Berührungslinien alle die Zwergaxe zwischen ihren Scheiteln A, B, namentlich die von jedem Schenkel der Hyperbel zwischen seinem Scheitel und dem Mittelpunkt C schneiden; so folgt daraus, daß die Hyperbel eine krumme Linie ist, von welcher jeder Schenkel seine hohle Seite gegen den seinem Hauptscheitel benachbarten, die erhabene Seite aber gegen den entgegengesetzten Brennpunkt, und mithin auch die beyde entgegengesetzte Schenkel ihre erhabene Seite gegen einander kehren.

5. Zus. Die Sätze 36, 37, 38. gelten namentlich auch in Bezug auf die Zwergaxe und die zweyte Axe. So könnte z. B. der 1ste Theil des 38sten Satzes in Bezug auf die Zwergaxe so ausgedrückt werden: das Rechteck CH × HE ist gleich dem AH × HB, oder, was einerley ist, CH : AH = BH : EH und umgekehrt, d. h. die Subtangente EH auf der Zwergaxe, oder das Stück der Zwergaxe zwischen der Tangente eines Punkts,

und

und seiner auf die Zwergaxe sich beziehenden Ordinate, ist die 4te Proportionallinie zu den Stücken der Zwergaxe zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate und zwischen ihren Scheiteln und der Ordinate, und umgekehrt.

6. Zus. Das Quadrat einer halben Ordinate auf einer von den Axen einer Hyperbel verhält sich zu dem Rechteck der korrespondirenden Subtangente dieser Axe, und dem auf der Axe zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate abgeschnittenen Stück, wie das Quadrat der Axe, mit welcher die Ordinate parallel lauft, zu dem Quadrat der andern Axe, oder, wie der Parameter der Axe, auf welche die Ordinate gezogen ist, zu dieser Axe.

Denn wenn die Ordinate DH an die Zwergaxe gezogen, und Ca die halbe kleine Axe ist; so ist (8ter Satz)

$DH^2 : AH \times BH = Ca^2 : CA^2$. Aber (5. Zus.) $AH \times BH = CH \times HE$. Mithin $DH^2 : CH \times HE = Ca^2 : CA^2 =$ Par. von $CA : CA$ (13. Erkl. 1. Zus.) Eben so ist, wenn die Ordinate Dh an die zweyte Axe gezogen ist, und ihr die Tangente in e begegnet (9. Satz)

$Dh^2 : Ca^2 + Ch^2 = CA^2 : Ca^2$. Aber (38. Satz) $Ch \times he = Ca^2 + Ch^2$. Mithin $Dh^2 : Ch \times he = CA^2 : Ca^2 =$ Param. von $Ca : Ca$. (13. Erkl. 1. Zus.) Dieser Zus. kann übrigens, wenn man statt des 8ten und 9ten Satzes den 31sten und 32sten braucht, auch noch allgemeiner in Bezug auf jeden Durchmesser, dem die Tangente begegnet, ausgedrückt werden.

7. Zus. Die auf einer der beyden Axen genommene **Subnormallinie** (welcher Ausdruck wieder eben das bezeichnet, wie bey der Ellipse s. II. B. 11. Satz, 9. Zus.) verhält sich zu dem auf dieser Axe zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate abgeschnittenen Stück, wie der Parameter dieser Axe zu der Axe. Es seye HN die Subnormallinie auf der Zwergaxe; so ist

$NH : DH = DH : HE$ (Zus. zu 8, VI. El.)
und $DH : CH = DH : CH$

folglich $NH : CH = DH^2 : CH \times HE =$ Param. von $CA : CA$ (6. Zus.) und eben so wird es für die zweyte Axe bewiesen.

7. Zus. Für eine gleichseitige Hyperbel hat man folgende Sätze. 1.) Es verhalten sich die einerley Punkt D zugehörige auf den beyden Axen genommene, von dem Mittelpunkt an gerechnete Abscissen CH, Ch zu einander umgekehrt, wie die Stücke eben dieser Axen zwischen dem Mittelpunkt und den Punkten, in welchen die an D gezogene Tangenten sie schneiden, d. i. umgekehrt wie CE, Ce.

Denn $CH \times CE = CA^2$, und $Ch \times Ce = Ca^2$ (36. Satz) Nun ist in der gleichseitigen Hyperbel $CA^2 = Ca^2$, mithin $CH \times CE = Ch \times Ce$, folglich $CH : Ch = Ce : CE$. Eben dieser Satz gilt, wie aus 12. Erklär. 3. Zus. erhellet, für die Abscissen von allen Durchmessern, denen die Tangente begegnet.

2.) Das Quadrat einer halben Ordinate auf einer von den Axen der Hyperbel ist gleich dem Rechteck aus der korrespondirenden Subtangente dieser Axe, und dem auf der Axe zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate abgeschnittenen Stück (6. Z. und 7. Erkl.). Kann ebenfalls auf die Ordinaten aller Durchmesser angewendet werden.

3.) Jede Subnormallinie ist gleich der korrespondirenden vom Mittelpunkt an gerechneten Abscisse (7. Zus.)

Satz 40. Aufg. Fig. 24.

Aus einem ausserhalb einer Hyperbel, deren Zwergaxe AB, und Brennpunkte F, G man kennt, gegebenenen Punkt T eine Berührungslinie an dieselbe zu ziehen.

Man beschreibe aus dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt einen ersten Kreis mit der Entfernung TF desselben von dem nähern Brennpunkt F als Halbmesser (wären die Brennpunkte gleich von T entfernt; so ändert diß nichts in der Verzeichnung), und aus dem andern Brennpunkt G einen zweyten Kreis mit einem Halbmesser gleich der Zwergaxe AB. Da nun der Punkt T nach der Voraussetzung ausserhalb der Hyperbel liegt; so ist (3. Satz) $GT - FT < AB$, mithin ist die Entfernung GT der Mittelpunkt der beyden Kreise kleiner, als die Summe ihrer Halbmesser $FT + AB$,

folglich schneiden sich die beyden Kreise nothwendig in 2 Punkten K, k, indem nemlich auch noch $GK = AB$, mithin $GK < GF$, folglich noch vielmehr $< GT + TF$, und $TK = TF$, folglich $TK \gtreqless TG$, mithin immer $TK < TG + GK$ ist. Man ziehe die Linien GK, Gk, und verlängere sie, bis sie der Hyperbel in M, m begegnen, ziehe dann die Linien TM, Tm: so werden diese die Hyperbel berühren.

Denn, weil $\left.\begin{matrix} GM - MK \\ mk - Gm \end{matrix}\right\} = GK = AB = \left\{\begin{matrix} GM - FM \\ Fm - gm \end{matrix}\right.$; so ist $MK = FM$, und $mk = Fm$. Ausserdem ist $TK = Tk = TF$, und TM in den Dreyecken TMK, TMF, und eben so Tm in den Dreyecken Tmk, TmF gemeinschaftlich, mithin halbiren die Linien TM, Tm die Winkel GMF, GmF, und berühren folglich die Hyperbel in M, m (39. Satz).

Satz 41. Aufg. Fig. 25.

Wenn die Zwergaxe AB und die Brennpunkte F, G einer Hyperbel gegeben sind, an dieselbe eine mit irgend einem zweyten Durchmesser parallele Berührungslinie zu ziehen.

1. Wenn der Durchmesser die zweyte Axe ist; so zieht man durch die Scheitel der Zwergaxe gerade Linien damit gleichlaufend (3. Satz, 1. Zus.).

2. Auf irgend einen andern Durchmesser LK hingegen fälle man aus dem einen Brennpunkt das Perpendikel FH, und verlängere es unbestimmt. Aus dem andern Brennpunkt G beschreibe man dann mit einem Halbmesser gleich der Zwergaxe AB einen Kreis, der, wie sich leicht erweisen läßt, diesem Perpendikel in 2 Punkten J, i begegnen wird. Nun ziehe man aus dem Brennpunkt G an die Punkte J, i die gerade Linien GJ, Gi, und verlängere sie, bis sie der Hyperbel in M, m begegnen, und ziehe endlich durch M, m Linien mit LK parallel. Weil $\left.\begin{matrix} GJ \\ Gi \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GM - MJ \\ mi - Gm \end{matrix}\right\} = AB = \left\{\begin{matrix} GM - MF \\ mF - Gm \end{matrix}\right.$, folglich $\left.\begin{matrix} MJ \\ mi \end{matrix}\right\} \equiv \left\{\begin{matrix} MF \\ mF \end{matrix}\right.$; so theilen die mit LK parallele, folglich auf die Grundlinien der gleichschenklichten Dreyecke FMJ, Fmi senkrechte Linien MN, mn

die Winkel an der Spitze M, m in 2 gleiche Theile, und berühren folglich die Hyperbel in M, m (39. Satz).

Satz 42. Aufg. Fig. 25.

Wenn man die Zwergaxe und die Brennpunkte einer Hyperbel kennt, einen irgend einem gegebenen zweyten Durchmesser LK zugeordneten Zwerg-Durchmesser zu ziehen.

Man ziehe eine Berührungslinie MN parallel mit dem der Lage nach gegebenen zweyten Durchmesser (41. Satz); so ist der durch den Berührungspunkt gezogene Zwergdurchmesser dem zweyten Durchmesser LK zugeordnet (12. Erklär. und 33. Satz).

Satz 43. (Simſ. 37. S.) Fig. 26.

Es sind zwey gerade Linien AB, CD der Lage und Größe nach gegeben, die sich in einem Punkt E unter rechten Winkeln halbiren, zwey entgegengesetzte Hyperbeln zu beschreiben, denen diese Linien als Axen, und namentlich z. B. AB als Zwergaxe zugehöre.

Man ziehe AC, und aus dem Punkt E schneide man auf AB die Linien EF, EG gleich AC ab, beschreibe dann vermittelst eines Fadens und Lineals, das um die Linie AB länger seye, als der Faden, aus den Brennpunkten F, G entgegengesetzte Hyperbeln, wie in der 1sten Erklärung, so gehen diese durch A, B, und CD ist ihre zweyte Axe. Denn, wenn die Hyperbel nicht durch A geht, so gehe sie, wenns möglich ist, durch H; so müßte HG — HF gleich dem Ueberschuß des Lineals über den Faden d. h. nach der Verzeichnung = AB seyn. Aber, weil BG = AF; so ist auch AG — AF = AB, was widersprechend ist: folglich geht die Hyperbel durch A. Eben so wird gezeigt, daß sie durch B gehe. Zugleich werden C, D die Endpunkte der zweyten Axe seyn. Denn wäre es C nicht, so seye es K, auf eben der Seite des Mittelpunkts E, auf welcher C liegt; zieht man nun KA, so müßte KA = EF seyn (6. Erklär.). Nach der Verzeichnung aber ist CA = EF, mithin müßte KA = CA seyn, was widersprechend ist.

14te Erklär. (Simſ. 13. Erkl.) Fig. 27.

Wenn über zwey geraden Linien Aa, Bb, die ſich unter rechten Winkeln halbiren, als Axen die entgegengeſetzte Hyperbeln AG, ag, und über eben dieſen Linien als Axen zwey andere entgegengeſetzte Hyperbeln BK, bk beſchrieben werden, ſo daß die Zwergaxe Bb des letztern Paars die zweyte Axe des erſten Paars, und die zweyte Axe Aa des zweyten Paars die Zwergaxe des erſten Paars iſt; ſo heißen dieſe 4 Hyperbeln zugeordnete Hyperbeln.

(Zuſ. Iſt eine von 4 zugeordneten Hyperbeln gleichſeitig, ſo ſind ſie es alle. Ueberhaupt ſind ſie dann alle unter ſich vollkommen gleich.)

Satz 44. (Simſ. 38. S.) Fig. 27.

Zugeordnete Hyperbeln haben gemeinſchaftliche Aſymptoten.

Von 4 zugeordneten Hyperbeln, deren Axen Aa, Bb ſind, haben die 2 entgegengeſetzte, deren Zwergaxe Aa iſt, die Linien CD, CE zu Aſymptoten; ſo werden dieſe auch die Aſymptoten der Hyperbel ſeyn, deren Zwergaxe Bb iſt. Durch den Scheitel A ziehe man DAE parallel mit BC, ziehe dann ferner BD und verlängere ſie bis F; ſo iſt (11. Erklär.) BC parallel und gleich mit AD oder AE, folglich iſt BD parallel und gleich mit AC: und wegen der gleichwinklichten und gleichen Dreyecke FBC, CAE iſt BF = CA; folglich ſind (11. Erkl.) CD, CF die Aſymptoten der Hyperbel, die Bb zur Zwergaxe und Aa zur zweyten Axe hat.

Zuſ. Zugeordnete Hyperbeln begegnen einander nie, wenn gleich je zwey anliegende unter denſelben ſich einander immer mehr nähern.

Satz 45. (Simſ. 39. S.) Fig. 27.

Wenn man aus einem Punkt G in einer von 4 zugeordneten Hyperbeln eine Linie GH mit einer Aſymptote EC parallel zieht, ſo, daß ſie der andern in H begegnet, und man zieht ferner aus einem Punkt K einer anliegenden Hyperbel eine Linie KL parallel mit der einen Aſymptote, ſo, daß ſie der andern in L begegnet; ſo ſind die Rechtecke GHC, KLC, aus den gezogenen Linien, und

den Stücken, die sie von den Asymptoten vom Mittelpunkt an gerechnet, abschneiden, gleich. Umgekehrt, wenn G auf einer Hyperbel liegt, und K innerhalb des Winkels, den die Asymptoten einer anliegenden Hyperbel bilden, und wenn KL × LC = GH × HC ist; so liegt K auf der anliegenden Hyperbel.

Es seyen Aa, Bb die Axen der zugeordneten Hyperbeln, und man ziehe AB, die der Asymptote CD in M begegne, und AD parallel mit CB. Weil nun BC, AD parallel und gleich sind; so sind die Dreyecke CBM, ADM gleich und ähnlich, mithin AM, MB gleich, folglich die Rechtecke AM × MC, BM × MC gleich. Es ist aber AB mit der Asymptote EC parallel (12. Erkl. 2. Z.), mithin sind die Rechtecke GHC, KLC den Rechtecken AMC, BMC folglich auch sich unter einander gleich (19. Satz, 2. Zus.)

Umgekehrt, wenn G auf der Hyperbel, und K innerhalb des Winkels DCF liegt, und KL × LC = GH × HC, und alles übrige wie vorhin bleibt; so liegt K auf der anliegenden Hyperbel. Denn, weil KL × LC = GH × HC = AM × MC = BM × MC, und B auf der anliegenden Hyperbel liegt, so liegt auch K darauf (21. Satz, 4. Zus.).

1. Zus. (Simſ. 1. Z.) Wenn (Fig. 28.) eine gerade Linie DE, die zwischen einer Hyperbel und einer anliegenden Hyperbel liegt, von einer Asymptote halbirt wird; so ist sie parallel mit der andern Asymptote. Denn DE begegne der Asymptote CG in L, man ziehe an die andere Asymptote DH, EK mit CG parallel. Weil nun DL, LE gleich, und DH, LC, EK parallel sind; so sind HC, KC gleich, und nach unserm Satz sind die Rechtecke DHC, EKC gleich, folglich sind DH, EK gleich, sie sind aber auch parallel, mithin ist DE parallel mit KH.

2. Zus. (Simſ. 2. Zus.) Umgekehrt, wenn DE parallel ist mit der Asymptote KH; so sind DL, LE gleich. Denn die Rechtecke DLC, ELC sind nach unserm Satz gleich.

3. Zus. Und, wenn aus einem Punkt D einer Hyperbel an die anliegende Hyperbel eine gerade Linie DE gezogen ist, die von einer Asymptote CG in L halbirt wird; so ist DE parallel mit

der andern Asymptote. Denn man ziehe an die andere Asymptote die Linien EK, DH mit CG gleichlauffend; so ist KC : CH = EL : LD, mithin KC = CH. Aber nach unserm Satz ist EK × KC = DH × HC, folglich EK = DH. Und, da diese beyde Linien auch parallel sind, so ist ED mit KH parallel.

Satz 46.

(Simf. 40. S.) Ist der 20ste des II. Buchs von Apollonius

Fig. 28.

Wenn eine gerade Linie MF eine von 4 zugeordneten Hyperbeln in D berührt, und man durch C den Mittelpunkt der Hyperbeln die Linie CD, und eine andere mit MF parallele Linie zieht, die einer anliegenden Hyperbel in E begegnet; so ist CE der halbe zweyte, dem durch den Berührungspunkt D gehenden Zwerg-Durchmesser zugeordnete Durchmesser. Und umgekehrt, wenn man den CD zugeordneten halben Durchmesser zieht; so ist sein Endpunkt auf einer anliegenden Hyperbel.

Man ziehe durch die Punkte D, E die Linien DH, EK parallel mit der Asymptote CM, so daß sie der andern CF in H, K begegnen. Weil nun MF die Hyperbel in D berührt; so ist MD = DF (26. S.), mithin CH = HF, folglich DH × HF = DH × HC = EK × KC (45. Satz). Und wegen der gleichwinklichten Dreyecke EKC, DHF, ist EK : DH = KC : HF, mithin (22, VI. E.) $EK^2 : DH^2$ = EK × KC : DH × HF, folglich $EK^2 = DH^2$, mithin EK = DH, mithin ist EC = DF (26, I. E.), aber diese beyde Linien sind auch parallel, mithin ist auch CE der zweyte CD zugeordnete halbe Durchmesser (12. Erklär.) Umgekehrt, wenn CE der zweyte CD zugeordnete halbe Durchmesser ist, und alles bleibt, wie vorhin; so liegt sein Endpunkt E auf einer, der Hyperbel, auf welcher D ist, anliegenden Hyperbel. Denn CE ist gleich und parallel mit DF (12. Erkl.) und EK ist parallel mit DH; folglich sind die Dreyecke EKC, DHF gleich (26, I. E.) mithin KC = HF = HC, und EK = DH, folglich EK × KC = DH × HF, mithin liegt, da D auf einer Hyperbel, und E inner-

halb des Nebenwinkels von MCF liegt, der Punkt E auf einer anliegenden Hyperbel (vorherg. Satz Nr. 2.)

1. Zus. (Simſ. 1. Z.) Wenn CD ein halber Zwerg-Durchmesser, und CE sein zugeordneter halber zweyter Durchmesser für die Hyperbel AD ist; so ist umgekehrt CE der halbe Zwerg- und CD der ihm zugeordnete halbe zweyte Durchmesser für die anliegende Hyperbel BE. Man ziehe DE, und ME, die der einen Asymptote in P begegne. Weil nun DE parallel ist mit CF (12. Erkl. 2. Zus.) und MF in D halbirt ist; so wird auch MP in E halbirt werden. Es ist aber E auf der anliegenden Hyperbel, mithin berührt MP diese Hyperbel in E. Und, da ferner CD parallel und gleich mit ME ist, weil nemlich CE, MD parallel und gleich sind; so ist CD der halbe zweyte dem Zwerg-Durchmesser CE in der Hyperbel BE zugeordnete Durchmesser.

2. Zus. (Simſ. 2. Zus.) Wenn das Bisherige bleibt; so treffen die Berührungslinien EM, DM, die nemlich durch den Scheitel von 2 zugeordneten Durchmessern gezogen sind, auf einer Asymptote zusammen, oder die gerade Linie, die durch den Mittelpunkt C, und den Punkt M gezogen wird, in welchem die Berührungslinien zusammentreffen, ist eine Asymptote. Denn, wenn CM keine Asymptote ist, so seye es CQ, die der Linie DM in Q begegnet; so ist mithin CE = DQ (12. Erkl.). Aber auch CE = DM, weil DMEC ein Parallelogramm ist (12. Erkl.) mithin DQ = EM, was widersprechend ist.

Satz 47. (Simſ. 41. S.) Fig. 29.

1.) Wenn aus dem Endpunkt B irgend eines zweyten Durchmessers CB einer Hyperbel AD eine gerade Linie BL mit irgend einem Zwerg-Durchmesser dieser Hyperbel CD parallel gezogen wird, und dem CD zugeordneten zweyten Durchmesser CK in L begegnet; so verhält sich das Quadrat von BL zu dem Rechteck KL × Lk aus den Stücken von CK zwischen seinen Scheiteln und der gezogenen Linie BL, wie das Quadrat von CD zu dem Quadrat von CK. 2.) Wird hingegen aus dem Endpunkt B irgend eines zweyten Durchmessers eine Linie BF mit irgend einem

andern zweyten Durchmesser CK parallel gezogen, die dem ihm zugeordneten Zwerg-Durchmesser in F begegnet; so ist $BF^2 : CD^2 + CF^2 = CK^2 : CD^2$.

1.) Die Endpunkte, oder die Scheitel der zweyten Durchmesser B, K, k liegen auf den anliegenden Hyperbeln BK, bk, und für diese wird dann Kk ein Zwerg-Durchmesser, und Dd sein ihm zugeordneter zweyter Durchmesser (46. Satz, 1. Zus.), mithin ist $BL^2 : KL \times Lk = Dd^2 : Kk^2 = CD^2 : CK^2$ (31. Satz).

2.) Der zweyte Fall wird völlig eben so aus dem 32sten Satz abgeleitet.

1. Zus. Für die gleichseitige Hyperbel ist $BL^2 = KL \times Lk$, und $BF^2 = CD^2 + CF^2$.

2. Zus. (Simſ. 3.) Zieht man aus irgend einem Punkt A einer Hyperbel eine Ordinate AM an einen zweyten Durchmesser Kk, und aus dem Endpunkt B irgend eines andern zweyten Durchmessers ebenfalls an Kk eine mit AM parallele Linie BL; so ist $BL^2 : AM^2 = KL \times Lk : KC^2 + CM^2$, wie aus diesem Satz und Satz 32. folgt. Zieht man hingegen aus irgend einem Punkt A der Hyperbel AD an einen Zwerg-Durchmesser Dd eine Ordinate AE, und aus dem Endpunkt B eines zweyten Durchmessers ebenfalls an Dd eine Linie BF parallel mit AE; so ist $BF^2 : AE^2 = CD^2 + CF^2 : DE \times Ed$, wie aus diesem Satz und Satz 31. folgt.

Satz 48. (Simsons 42. S.) Fig. 29.

Wenn man aus dem Endpunkt B irgend eines zweyten Durchmessers CB eine Linie BF parallel mit den Ordinaten irgend eines Durchmessers Dd, und BH parallel mit dem Durchmesser CA zieht, der dem CB zugeordnet ist, und BH dem Durchmesser Dd in H begegnet; so ist der halbe Durchmesser CD die mittlere Proportionallinie zwischen CF, CH.

Denn B liegt auf der anliegenden Hyperbel, und CA ist ein zweyter Durchmesser eben dieser Hyperbel (46. S. 1. Zus.) mithin berührt BH diese Hyperbel (12. Erkl.) und es ist $CF : CD = CD : CH$ (36. Satz).

Zus. Auch der 38ste Satz, auf diesen Fall angewendet, findet Statt.

Satz 49. (Simsons 43. S.) Fig. 29.

Wenn aus den Endpunkten A, B von zwey zugeordneten Durchmessern CA, CB einer Hyperbel AD an irgend einen dritten Zwerg-Durchmesser Dd derselben Hyperbel Ordinaten AE, BF gezogen werden; so ist CE_2 (nemlich das Quadrat des Stücks von Dd zwischen dem Mittelpunkt und der aus dem Endpunkt A des Zwerg-Durchmessers gezogenen Ordinate AE) gleich der Summe des Quadrats CF (des Stücks zwischen dem Mittelpunkt und der andern Ordinate) und des Quadrats des halben Durchmessers CD: hingegen CF^2 (das Quadrat des Stücks von Dd zwischen dem Mittelpunkt und der aus dem Endpunkt des zweyten Durchmessers gezogenen Ordinate BF) gleich dem Rechteck $DE \times Ed$ aus den Stücken von Dd zwischen seinen Scheiteln und der aus A gezogenen Ordinate.

Man ziehe an den Durchmesser Dd die Linie AG mit BC, und BH mit AC parallel; so sind die Dreyecke CAG, HBC gleichwinklicht, und, weil AE, BF parallel sind (34 Satz); so sind auch CAE, HBF gleichwinklicht: mithin ist $CE : HF = CA : HB = CG : CH$. Weil aber CD die mittlere Proportionallinie ist sowohl zwischen CE, CG, als zwischen CF, CH (36. Satz und 48. Satz); so ist $CF : CE = CG : CH$, mithin $CF : CE = CE : HF$, und $CE^2 = CF \times HF$. Es ist aber $CF \times HF = CF^2 + CD^2$ (48. Satz, Zus.), mithin $CE^2 = CF^2 + CD^2$, und wenn man beyderseits das Quadrat von CD wegnimmt; so bleibt das Rechteck $DE \times Ed = CF_2$.

Zus. (Sims. 3.) Es verhält sich daher der halbe Durchmesser CD, an welchem die Ordinaten gezogen werden, zu dem ihm zugeordneten halben Durchmesser CK, wie die Entfernung einer dieser Ordinaten von dem Mittelpunkt, zu der andern Ordinate. Denn $CD^2 : CK^2 = DE \times Ed : EA^2$ (31. S.) $= CF^2 : EA^2$ (uns. Satz), folglich $CD : CK = CF : EA$. Eben so, weil $CD^2 : CK^2 = CF^2 + CD^2 : BF^2$ (47. S.) $= CE^2 : BC^2$; so ist $CD : CK = CE : BF$.

Satz 50. (Simsons 44. S.) Fig. 29.

Der Unterschied der Quadrate von irgend zwey halben zugeordneten Durchmessern ist gleich dem Unterschied der Quadrate der halben Axen, wenn nemlich die Durchmesser ungleich sind; ist aber irgend ein Durchmesser gleich seinem zugeordneten Durchmesser; so ist jedes Paar zugeordneter Durchmesser gleich, und der Asymptotenwinkel ist in diesem Fall ein rechter.

Es seyen 1) CA, CB irgend zwey zugeordnete Durchmesser, und CD, CK die halben Axen, aus A, B ziehe man an die Axen die Ordinaten AE, AM, BF, BL; so ist $CB^2 - CA^2 = (CL^2 + BL^2) - (CM^2 + MA^2)$: aber nach dem vorhergehenden Satz ist $CE^2 = CF^2 + CD^2$, und $CL^2 = CM^2 + CK^2$, mithin ist, weil $CE = MA$, $CM = AE$, $CF = BL$, $CB^2 - CA^2 = (CM^2 + CK^2 + BL^2) - (CF^2 + CD^2 + AE^2) = (AE^2 + CK^2 + CF^2) - (CF^2 + CD^2 + AE^2) = CK^2 - CD^2$. Und eben so, wenn $CB < CA$ ist.

Anderer Beweis von Nr. 1. Es seyen Fig. 30. AB, AC irgend zwey Zwerg-Durchmesser in der Hyperbel, deren Asymptoten AD, AE sind, man ziehe die Berührunglinien DB, CE, die den Asymptoten in D, E begegnen; so ist (12. Erkl. und 33. Satz) BD gleich dem halben zweyten AB zugeordneten, und CE gleich dem halben zweyten AC zugeordneten Durchmesser. Man ziehe nun durch die Punkte B, C die Linien BF, CH mit den Asymptoten parallel, und BG, CK auf die Asymptoten senkrecht; so sind die Rechtecke AFB, AHC gleich (19. Satz, 2. Zus.) mithin $AF : AH = HC : FB$ d. i. wegen der gleichwinklichten Dreyecke $= HK : FG$, mithin ist $AF \times FG = AH \times HK$, und $4AF \times FG = 4AH \times HK$. Aber $DF = FA$ (20. Satz), mithin $AG = DF + FG$; folglich (8, II. E.) $4AF \times FG = AG^2 - DG^2$ d. i. (wegen der gleichwinklichten Dreyecke DGB, AGB) $= AB^2 - DB^2$. Eben so wird gezeigt, daß $4AH \times HK = AC^2 - EC^2$ seye. Mithin ist $AB^2 - DB^2 = AC^2 - EC^2$.

Wenn aber 2) irgend ein Zwerg-Durchmesser AB einer Hyperbel gleich ist seinem zugeordneten zweyten Durchmesser BD; so ist auch jeder andere Zwerg-Durchmesser gleich seinem zugeordneten

zweyten Durchmesser, und der Asymptotenwinkel ein rechter. Denn, weil DB = DA, und DF = FA, und BF gemeinschaftlich ist; so ist in den Dreyecken DBF, ABF der Winkel BFD, mithin EAD ein rechter.

Folglich ist auch CHE ein rechter, und da EH, HA gleich und CH gemeinschaftlich ist; so ist AC = EC. Was unter Nr. 2. gesagt worden ist, ist zum Theil Verallgemeinerung, zum Theil der umgekehrte Satz von 12. Erkl. 3. Zus.

Satz 51. (Simſ. 45. S.) Fig. 31.

Wenn durch die Scheitel von 2 zugeordneten Durchmessern AB, CD 4 Berührungslinien an die zugeordnete Hyperbeln gezogen werden; so ist das von ihnen gebildete Parallelogramm KLMN gleich dem von den Berührungslinien irgend 2 anderer zugeordneter Durchmesser EF, GH in ihren Scheiteln gebildeten Parallelogramm OPQR.

Es seye S der Mittelpunkt der Hyperbel. Weil nun KN, LM, und eben so KL, MN parallel sind (26. Satz, 3. Zus.); so ist KLMN ein Parallelogramm. Eben so wird bewiesen, daß OPQR ein Parallelogramm seye. Weil nun AK, CK die Hyperbeln in den Scheiteln von zugeordneten Durchmessern berühren; so treffen sie in einem Punkt K auf der Asymptote zusammen (46. Satz, 2. Zus.) Eben so wird gezeigt, daß die übrige Winkel der Parallelogramme auf den Asymptoten liegen. Die Asymptoten sind mithin ihre Diagonalen, folglich ist das Parallelogramm KLMN gleich 4mal dem Dreyeck KSN, und das Parallelogramm OPQR gleich 4mal dem Dreyeck OSR. Diese beyde Dreyecke aber sind gleich, weil die Rechtecke KS × SN, OS × SR gleich sind (28. Satz und 15, VI. E.), folglich sind auch die Parallelogramme KLMN, OPQR gleich. Der Beweis läßt sich auch noch führen, wie 22. Satz des II. Buchs. Auch findet hier ein ähnlicher Zusatz Statt, wie bey 22. Satz des II. Buchs.

Satz 52. (Simſ. 46. S.) Fig. 32.

Wenn 2 zugeordnete Durchmesser ACB, DCE der Berührungslinie FGH einer Hyperbel in G, H begegnen; so ist das

Rechteck GFH aus den Stücken der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkt und den Durchmessern gleich dem Quadrat von CK (dem halben dem durch den Berührungspunkt gezogenen CF zugeordneten Durchmesser.)

Man ziehe aus den Punkten F,K an AB die Linien FM, KL mit DE gleichlauffend; so ist, wegen der Parallellinien, GM : MC = GF : FH, mithin sind die Rechtecke GMC, GFH ähnlich. Und weil die Dreyecke GMF, CLK gleichwinklicht sind; so ist GM : GF = CL : CK, folglich sind die auf diesen Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinichten Figuren $GM \times MC$, $GF \times FH$, CL^2, CK^2 auch proportional (22, VI. E.) Aber $GM \times MC = AM \times MB$ (38. Satz) $= CL^2$ (49. Satz), mithin ist $GF \times FH = CK^2$.

Satz 53. (Simf. 47. S.) Fig. 33.

1) Wenn man aus einem Punkt F einer Hyperbel an einen Zwerg-Durchmesser AB eine halbe Ordinate FG zieht; so verhält sich das Rechteck AGB aus den Stücken des Zwerg-Durchmessers zwischen seinen Scheiteln und der Ordinate zu dem Quadrat der halben Ordinate FG, wie der Durchmesser AB zu seinem Parameter. 2) Zieht man hingegen aus einem Punkt F einer Hyperbel eine halbe Ordinate FK an einen zweyten Durchmesser DE; so verhält sich die Summe der Quadrate des halben zweyten Durchmessers CD und seines Stücks CK zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate zu dem Quadrat der halben Ordinate FK wie der zweyte Durchmesser DE zu seinem Parameter.

Es seye AH der Parameter des Durchmessers AB, DE sein zugeordneter Durchmesser und L der Parameter des Durchmessers DE. Weil nun 1) AB : DE = DE : AH (13 Erkl.); so ist $AB : AH = AB^2 : DE^2 = AG \times GB : FG^2$ (31. Satz). Und weil 2) DE : AB = AB : L; so ist $DE : L = DE^2 : AB^2 = CD^2 + CK^2 : FK^2$ (32. Satz).

Satz 54. (Simf. 48. S.) Fig. 33.

Wenn man aus einem Punkt F einer Hyperbel an einen Zwerg-Durchmesser AB eine halbe Ordinate FG zieht, und aus

einem Scheitel A des Durchmessers eine Linie AH gleich dem Parameter des Durchmessers senkrecht darauf errichtet; so ist das Quadrat der halben Ordinate FG gleich dem Rechteck, das über dem verlängerten Parameter sich beschreiben läßt, und zur Höhe die Abscisse AG hat, und dessen auf der Verlängerung des Parameters stehendes Stück ein dem zwischen dem Durchmesser und seinem Parameter enthaltenen ähnliches und ähnlich liegendes Rechteck ist. (Mit andern Worten: das Quadrat der halben Ordinate FG ist größer als das Rechteck zwischen der Abscisse AG und dem Parameter AH um ein Rechteck, dessen eine Seite eben diese Abscisse AG, die andere die 4te Proportionallinie zu dem Durchmesser, seinem Parameter und der Abscisse AG ist.)

Man ziehe HB, und durch G die Linie GM parallel mit AH, die der Linie BH in M begegne, durch M ziehe man MN parallel mit AB, und ergänze die Rechtecke MNHO, BAHP. Weil nun (vorh. Satz) $AG \times GB : GF^2 = AB : AH = GB : GM = AG \times GB : AG \times GM$; so ist $GF^2 = AG \times GM$. Aber $AG \times GM$ ist ein über dem verlängerten Parameter AH beschriebenes Rechteck, das AG zur Höhe hat, und sein auf der Verlängerung des Parameters stehendes Stück HOMN ist ähnlich und ähnlich liegend mit dem Rechteck ABHP zwischen dem Durchmesser und dem Parameter. (Oder $GF^2 = AG \times GM = AG \times AH + AG \times HN$ d. i. weil $AB : AH = HO : OM = AG : HN$, $FG^2 = AG \times AH + AG \times \frac{AG \times AH}{AB}$) Wegen dieses Ueberschusses des Quadrats der halben Ordinate über das Rechteck zwischen dem Durchmesser und dem Parameter nannte Apollonius diese Linie Hyperbel.

Zus. (Simſ. 3.) Man sieht leicht, daß $GF^2 = AG \times GM$ ist, auch wenn AH nicht senkrecht auf AB gezogen wird.

Satz 55. (Simſ. 49. S.) Aufg. Fig. 34.

Wenn die Zwergaxe AB der Lage und Größe nach und außerhalb derselben ein Punkt F gegeben ist, eine Hyperbel mit dieser Zwergaxe zu beschreiben, die durch den Punkt F gehe. Es muß

aber das aus F auf AB gefällte Perpendikel auf ihre Verlängerung treffen.

Man fälle aus F auf AB das Perpendikel AB, und finde eine Linie DE, so daß $AG \times GB : FG^2 = AB^2 : DE^2$. Nun lasse man die Linien AB, DE sich unter einem rechten Winkel halbiren, und beschreibe (Satz 43.) eine Hyperbel, die AB, DE zu Axen, und zwar namentlich AB zur Zwergaxe habe; so geht diese durch den Punkt F (31. Satz, 2. Zus.)

Satz 56. (Simſ. 50. S.) Aufg. Fig. 34.

Wenn die Zwergaxe DE der Lage und Größe nach, und ausserhalb derselben ein Punkt F gegeben ist, eine Hyperbel mit dieser zweyten Axe zu beschreiben, die durch den Punkt F gehe.

Man halbire DE in C, fälle FH senkrecht darauf, und finde eine Linie AB, so daß $CD^2 + CH^2 : FH^2 = DE^2 : AB^2$, lasse die Linien DE, AB sich unter einem rechten Winkel halbiren, und beschreibe (Satz 43) eine Hyperbel, die AB, DE zu Axen, und zwar namentlich AB zur Zwergaxe habe; so geht diese durch den Punkt F (32. Satz, 2. Zus.

Satz 57. (Simſ. 51. S.) Fig. 34.

In einer Hyperbel ist die Zwergaxe der kleinste unter allen Zwerg-Durchmessern, und der Winkel, den jeder andere Zwerg-Durchmesser mit der durch seinen Scheitel gezogenen Berührungslinie macht, ist kleiner, als ein rechter.

Es sey in einer Hyperbel die halbe Zwergaxe CA, und irgend ein anderer Zwerg-Durchmesser CF. Man fälle aus F das Perpendikel FG auf die Axe CA; so ist $CF > CG$, mithin um so mehr $> CA$. Man ziehe aus F eine Berührungslinie, die der Axe in K begegne. Weil nun CFG spitzig ist; so ist um so viel mehr CFK spitzig.

Satz 58. (Simsons 52. S.) Fig. 34.

Von einer gegebenen Hyperbel AF einen Durchmesser, den Mittelpunkt, die Axen, die Asymptoten und die Brennpunkte zu finden.

Man ziehe zwey gerade, von der Hyperbel begränzte Parallellinien; so ist die sie halbirende Linie ein Durchmesser (34. S.

3. Zus.). Eben so finde man einen andern Durchmesser. Der Punkt, in welchem sie sich schneiden, ist der Mittelpunkt (4. Erkl.) Sind aber entgegengesetzte Hyperbeln der Lage nach gegeben; so ist der Punkt, der den zuerst gefundenen Durchmesser halbirt, der Mittelpunkt. Man nehme nun auf der Hyperbel irgend einen Punkt F, ziehe aus dem Mittelpunkt die Linie CF, und beschreibe mit dem Halbmesser CF einen Kreis. Begegnet dieser der Hyperbel in keinem andern Punkt als F; so ist CF der kleinste unter den Zwerg-Durchmessern, mithin die Zwergaxe. Begegnet er aber der Hyperbel wieder in einem andern Punkt L; so ziehe man FL, und halbire sie in dem Punkt G, ziehe dann die Linie CG, die der Hyperbel in A begegne; so ist CA die halbe Zwergaxe. Denn, weil FG = GL; so ist FL eine Ordinate des Durchmessers CG, mithin berührt die durch A mit FL parallel gezogene Linie die Hyperbel (35. Satz), und macht mit CA einen rechten Winkel, weil FGA ein rechter ist; folglich ist CA die Zwergaxe (vorherg. Satz). Um nun die zweyte Axe zu finden, ziehe man durch C eine Linie senkrecht auf AC, und nehme auf ihr CD so, daß, wenn man erst CB = CA gemacht hat, $BG \times GA : GF^2 = CA^2 : CD^2$ seye; so ist CD die halbe zweyte Axe, wie aus Satz 8. erhellet. Endlich findet man die Asymptoten nach der 11ten Erkl. Sind aber zwey entgegengesetzte Hyperbeln der Lage nach gegeben, so lassen sich die Asymptoten leichter so finden. Man ziehe durch den Mittelpunkt irgend einen Zwerg-Durchmesser AB, und eine damit parallel laufende, von den Hyperbeln begränzte Linie OP, mache dann jedes der Rechtecke OR × RP, OQ × QP gleich dem Quadrat von CA, was möglich ist, weil CA kleiner ist, als die Hälfte von OP (18. Satz, 4. Zus.); so sind die Linien CQ, CR die Asymptoten (18. Satz, 5. Zus.). Die Brennpunkte werden gefunden, wie im 43sten Satz.

Satz 59 (Simsons 53. S.) Fig. 35.

Wenn die Asymptoten einer Hyperbel AC, BC und ein Punkt D auf derselben gegeben sind, ihre Axen zu finden, und sie zu beschreiben.

Ana-

Analysis.

Man denke sich die Sache geschehen. Es seyen nemlich FCE, GCH die Axen, von welchen FE, die innerhalb des Winkels ACB liegt, in welchem der Punkt D ist, nothwendig die Zwergaxe seyn muß. Man ziehe durch E eine gerade Linie mit GH gleichlauffend, die den Asymptoten in K, L begegne; so ist (11. Erklär.) KL gleich GH, und in dem Punkt E halbirt. Weil nun in den Dreyecken KEC, LEC, KE = EL, und die Winkel bey E rechte sind; so sind die Winkel ECK, ECL gleich. Es ist aber KCL gegeben, mithin auch seine Hälfte KCE, und da KC der Lage nach, und der Punkt C gegeben ist; so ist CE der Lage nach gegeben (32. D.). Durch den gegebenen Punkt D ziehe man nun die Linie DMN parallel mit CE, und sie begegne den Asymptoten in M, N; so ist DN der Lage nach (31. D.) und die Punkte M, N (27. D.) mithin DM, DN der Größe nach (29. D.) gegeben, folglich ist das Rechteck MDN der Größe nach gegeben, diesem aber ist CE^2 gleich (18. Satz, 1. Zus.) folglich ist CE^2, mithin CE selbst der Größe nach gegeben (60. D.), aber, wie gezeigt worden ist, auch der Lage nach, mithin ist der Punkt E und die gerade Linie KEL der Lage nach (30. und 32. D.), folglich auch der Größe nach gegeben, weil CA, CB der Lage nach gegeben sind. Nun ist GH parallel und gleich mit KL, folglich der Größe und der Lage nach gegeben, weil der Punkt C gegeben ist, der sie halbirt. Mithin sind die Axen EF, GH der Größe und Lage nach gegeben, folglich kann man (43. Satz) die Hyperbel beschreiben.

Komposition.

Man halbire den Winkel ACB durch die gerade Linie CE, ziehe DMN parallel mit CE, mache jedes der Quadrate von CE, CF gleich dem Rechteck MDN, ziehe durch E senkrecht auf CE die gerade Linie KEL, die den Asymptoten in K, L begegne, und durch C die Linie GCH parallel und gleich mit KEL, so daß GH in C halbirt werde, beschreibe dann (43. Satz) mit den Axen EF, GH, worunter EF die Zwergaxe seye, eine Hyperbel; so wer-

den AC, BC ihre Asymptoten seyn, und sie wird durch den Punkt D gehen. Denn, weil nach der Verzeichnung KEL parallel und gleich mit der zweyten Axe GH ist, und in E halbirt wird (26, I. E.); so sind CK, CL die Asymptoten (1. Erkl.) und weil das Rechteck MDN gleich ist dem Quadrat von CE, so liegt D auf der Hyperbel (23. Satz, 1. Zus.) Uebrigens kann man, wenn die Asymptoten AC, BC und ein Punkt der Hyperbel D gegeben sind, leicht so viele Punkte, als man will, auf ihr oder der entgegengesetzten Hyperbel finden, wenn man nemlich durch D gerade Linien ADB, Dab, in beliebiger Anzahl zieht, die den Asymptoten in A, B, und a, b begegnen, und BO, bo AD, aD gleich macht, so, daß die Punkte D, O, und D, o beyde zugleich zwischen A, B oder ausserhalb a, b fallen: denn so liegen die Punkte O, o auf den Hyperbeln (22. Satz).

Satz 60. (Simsons 54. S.) Fig. 36.

Wenn zwey gerade Linien ACB, DCE, die sich beyderseits in C halbiren, der Lage und Größe nach gegeben sind; entgegengesetzte Hyperbeln zu beschreiben, so, daß die eine von den geraden Linien z. B. AB ein Zwerg-Durchmesser, die andere DE der AB zugeordnete zweyte Durchmesser seye.

Analysis.

Man denke sich die Sache geschehen, und es seyen CF, CG die Asymptoten, denen eine aus einem Scheitel A eines Zwerg-Durchmessers mit DE parallel gezogene Linie in F, G begegne; so ist FG = DE, und wird in A halbirt (12. Erkl.). Es ist aber DE der Größe nach gegeben, mithin auch FG und ihre Hälfte AF, aber auch der Lage nach, weil sie durch einen gegebenen Punkt A parallel mit der der Lage nach gegebenen Linie DE gezogen ist (31. D.), mithin ist der Punkt F gegeben (30 D.). Eben so ist der Punkt G gegeben, aber auch der Punkt C, folglich sind die Asymptoten CF, CG der Lage nach gegeben, und da der Punkt A auf der Hyperbel gegeben ist, so läßt sie sich nach dem vorhergeh. Satz beschreiben.

Komposition.

Durch einen Scheitel A des Zwerg-Durchmessers ziehe man FAG parallel und gleich mit dem zweyten Durchmesser DE, so, daß FG in A halbirt werde, ziehe die Linien CF, CG, und beschreibe nach dem vorhergehenden Satz eine Hyperbel, wovon CF, CG die Asymptoten seyen, und die durch den Punkt A gehe. Eben so beschreibe man vermittelst des Punkts B die entgegengesetzte Hyperbel; so ist AB ein Zwerg-Durchmesser derselben, und DE der AB zugeordnete zweyte Durchmesser. Denn, weil CF, CG die Asymptoten der Hyperbeln sind, und durch einen Punkt A auf der Hyperbel die Linie FAG gezogen ist, die in A halbirt wird; so berührt FG die Hyperbel in A (26. Satz). Nun ist DE parallel und gleich mit FG, und ist in dem Mittelpunkt C halbirt, mithin ist DE der zweyte, dem Zwerg-Durchmesser AB zugeordnete Durchmesser (12. Erkl. und 33. Satz).

Satz 61. (Simſ 55. S.) Fig. 36.

Wenn ein Durchmesser der Hyperbel der Lage und Größe nach, und eine gerade Linie der Lage nach gegeben ist, die von einem gegebenen Punkt auf einer Hyperbel als Ordinate an denselben gezogen ist, die Hyperbel zu beschreiben.

1. Fall. Wenn ein Zwerg-Durchmesser einer Hyperbel gegeben ist. Es seye der Zwerg-Durchmesser AB gegeben, und die an denselben aus einem gegebenen Punkt H einer Hyperbel gezogene Ordinate seye der Lage nach gegeben. Man halbire AB in C, ziehe durch C eine Linie parallel mit der gegebenen Ordinate HK, und nehme auf derselben CD = CE, so daß $AK \times KB : HK^2 = AC^2 : \begin{cases} CD^2 \\ CE^2 \end{cases}$, und beschreibe nach dem vorhergeh. Satz entgegengesetzte Hyperbeln, von denen AB ein Zwerg-Durchmesser, und DE der ihm zugeordnete zweyte Durchmesser seye; so geht die eine davon durch H (31. Satz, 2. Zus.).

2. Fall. Wenn ein zweyter Durchmesser gegeben ist. Es seye der zweyte Durchmesser DE gegeben, und die an denselben aus einem gegebenen Punkt H einer Hyperbel gezogene Ordinate

HL seye der Lage nach gegeben. Man halbire DE in C, ziehe durch C eine Linie parallel mit HL, und nehme auf derselben CA = CB, so, daß $CL^2 + CD^2 : HL^2 = CD^2 : \begin{cases} CA^2 \\ CB^2 \end{cases}$, und beschreibe, vermittelst des vorhergehenden Satzes entgegengesetzte Hyperbeln, von denen AB ein Zwerg-Durchmesser, und DE der ihm zugeordnete zweyte Durchmesser seye; so geht die eine davon durch H (32. Satz, 2. Zus.), nemlich die, die mit dem Punkt H auf einerley Seite von DE liegt.

Satz 62. (Simsons 56. S.) Fig. 37.

Wenn ein Kegel, dessen Scheitel A, und Grundfläche der Kreis BC ist, von einer Ebene ABC, die durch die Axe geht, und von einer andern Ebene DEF geschnitten wird, die die Grundfläche des Kegels in einer geraden Linie DE schneidet, die senkrecht ist auf BC der Grundlinie des durch die Axe gehenden Dreyecks ABC, und wenn FG die Durchschnittslinie der Ebene durch die Axe und der Ebene DEF nur erst verlängert mit der einen Seite AC des Dreyecks ABC in einem Punkt H, der über den Scheitel des Kegels hinaus liegt, zusammentrift: so ist der Durchschnitt der Ebene DEF mit der Kegeloberfläche eine Hyperbel, und FH einer von ihren Zwerg-Durchmessern.

Denn man nehme auf dem Schnitt DFE irgend einen Punkt K, und ziehe durch K an FG die Linie KL parallel mit DE, durch L ziehe man MN parallel mit BC; so ist (15, XI. E.) die Ebene durch KL, MN parallel mit der Ebene durch DE, BC d. i. mit der Grundfläche des Kegels, mithin ist (I. B. 24. S.) die Ebene durch KL, MN ein Kreis, dessen Durchmesser MN ist. Es ist aber (10, XI. E.) KL senkrecht auf MN, weil DE senkrecht auf BC ist, mithin ist $ML \times LN = KL^2$ (35, III. E.), und eben so ist $BG \times GC = DG^2$, folglich ist $DG^2 : KL^2 = BG \times GC : ML \times LN$.

Aber $BG : ML = FG : FL$

und $GC : LN = GH : LH$

mithin ist $BG \times GC : ML \times LN = FG \times GH : FL \times LH$, folglich auch $DG^2 : KL^2 = FG \times GH : FL \times LH$. Man beschreibe nun nach dem vorhergehenden Satz eine Hyperbel, die FH zu einem Zwerg-Durchmesser habe, und in welcher DG ein halbe Ordinate von FH seye. Weil nun der Punkt D nach der Verzeichnung auf dieser Hyperbel liegt; so liegt auch der Punkt K darauf (31. Satz, 3. Zus.). Und eben so wird bewiesen, daß alle Punkte des Schnitts DEF auf derselben liegen.

(Bemerk. Man sieht leicht, daß wenn man sich einen zweyten, dem ABC im Scheitel gerade entgegengesetzten Kegel denkt, der über H hinaus verlängerte Schnitt DFE auf der Oberfläche dieses zweyten Kegels die DFE entgegengesetzte Hyperbel bilden werde.)

1. Zus. Man ziehe in der Ebene BAC durch die Scheitel des Zwerg-Durchmessers FH die Linien FO, HJ parallel mit BC, bis sie die eine der Seite AC in O, die andere der Verlängerung der Seite AB in J begegnen, so ist $BG : GF = HJ : HF$

$$GC : HG = FO : HF$$

mithin $\left.\begin{matrix} BG \times GC \\ DG^2 \end{matrix}\right\} : HG \times GF = HJ \times FO : HF^2$.

Aber, wenn Z der HF zugeordnete zweyte Durchmesser ist; so ist auch (31. Satz) $DG^2 : HG \times GF = Z^2 : HF^2$, mithin ist $Z^2 = HJ \times FO$. Da nun $HJ : BC = AH : AC$

und $FO : BC = AF : AB$; so ist

$$HJ \times FO : BC^2 = AH \times AF : AC \times AB$$

mithin auch $Z^2 : BC^2 = AH \times AF : AC \times AB$.

2. Zus. 1. Ist der Winkel BAC spitzig, mithin FAH stumpf, so erhält man, wenn man sich aus C und A Perpendikel auf AB gefällt denkt, aus 12. II. und 13. II. E.

$FH^2 - (AH^2 + AF^2) : AC^2 + AB^2 - BC^2 = AH \times AF : AC \times AB$.

2. Ist hingegen der Winkel BAC stumpf, mithin FAH spitzig; so ist $AH^2 + AF^2 - FH^2 : BC^2 - (AC^2 + AB^2) = AH \times AF : AC \times AB$.

3. Ist endlich der Winkel BAC, mithin auch FAH ein rechter; so ist $FH^2 = AH^2 + AF^2$, so wie $BC^2 = AC^2 + AB^2$, woraus sich mithin in allen Fällen aus den gegebenen Linien AC, AB, BC, AH, AF der Zwerg-Durchmesser FH, so wie nach dem vorigen Zusatz sein zugeordneter zweyter Durchmesser bestimmen läßt.

3. Zus. Wenn der Kegel geradstehend ist, oder, wenn in einem schiefstehenden Kegel der Schnitt ABC durch die Axe senkrecht ist auf der Grundfläche des Kegels; so ist die Linie DE, die nach der Voraussetzung in der Grundfläche senkrecht ist auf BC dem Durchschnitt der Grundfläche und des Schnitts durch die Axe, auch senkrecht auf ABC (4. Erkl. XI. E.), mithin senkrecht auf FG. Folglich ist eben so jede Ordinate KL ebenfalls senkrecht auf FG, mithin ist der Durchmesser FH die Zwergaxe der Hyperbel, und die ihr zugeordnete zweyte Axe ist (1. Zus.) die mittlere Proportionallinie zwischen HJ, FO, oder diese zugeordnete Axe verhält sich zu BC, wie die mittlere Proportionallinie zwischen AH und AF zu der mittlern Proportionallinie zwischen AC und AB, oder, wenn der Kegel geradstehend ist; so verhält sich diese zweyte Axe zu BC, wie die mittlere Proportionallinie zwischen AH und AF zu AB oder AC.

Auch bey der Hyperbel finden in Ansehung des Krümmungskreises ganz ähnliche Sätze statt, wie diejenigen waren, die wir im IIten Buch in Ansehung der Ellipse hatten. Da aber die Beweise der Sätze mit sehr geringen Abänderungen wörtlich dieselbe seyn würden, wie bey der Ellipse, die Auseinandersetzung der verschiedenen Fälle aber noch eine große Mannigfaltigkeit von Figuren nöthig gemacht hätte; so glaubte man die Entwicklung dieser Sätze, die nun nach der Analogie des Vortrags bey der Ellipse keine große Schwierigkeit haben kann, dem Privatfleiß überlassen zu dürfen.

Anhang von der analytischen und analytisch-trigonometrischen Behandlung der Kegelschnitte.

§. 1.

Seit der Anwendung der Algeber auf Geometrie pflegt man besonders auch die Lehre von den Kegelschnitten geometrisch-algebraisch, oder, wie man es sonst auch nennt, geometrisch-analytisch zu behandeln. Von der Art, dieses bey krummen Linien überhaupt zu thun, werden wir uns durch folgendes leichte Beyspiel eine Vorstellung machen können. Es ist eine aus der Geometrie bekannte Eigenschaft des Kreises, daß (Fig. 38.) eine Linie PM, die senkrecht auf seinen Durchmesser AB von einem Punkt M des Kreises gezogen wird, die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken AP, PB des Durchmessers ist. Heißt mithin $AB = a$, $AP = x$, mithin $BP = a - x$, $PM = y$; so ist $y^2 = x(a - x) = ax - x^2$. Eine solche Gleichung zwischen den Größen y und x heißt eine unbestimmte Gleichung, weil x unzählich viele verschiedene Werthe haben kann, wobey jedem derselben ein bestimmter Werth von y (oder hier eigentlich immer zwey entgegengesetzte Werthe von y, welche die auf den entgegengesetzten Seiten von AB genommene Linien PM, Pm bezeichnen) korrespondirt. Da nun, wie ebenfalls die Geometrie zeigt, nur der Kreis diese Eigenschaft hat, oder jede Linie, die diese Eigenschaft hat, ein Kreis ist; so drückt diese Gleichung die Natur des Kreises vollkommen aus. Sie ist als eine Erklärung (Definition) des Kreises anzusehen. Alle Eigenschaften des Kreises müssen sich aus derselben ableiten lassen.

Auf ähnliche Art können nun auch andere krumme Linien durch solche Gleichungen ausgedrückt werden, welche das Verhältniß anzeigen, zwischen den auf einer gewissen der Lage nach angenommenen geraden Linie abgeschnittenen Stücken, wie hier AP, AP', AP'' u. s. w. (man nennt diese Stücke die Abscissen, die Linie, auf der sie abgeschnitten sind, die Abscissenlinie, den

Punkt A, bey welchem sie anfangen, den Anfangspunkt der Abscissen) und den unter einem bestimmten Winkel (hier einem rechten) an sie gezogenen und bis an die krumme Linie verlängerten geraden Linien (die man die Ordinaten, so wie Abscissen nebst den ihnen zugehörigen Ordinaten zusammen Coordinaten nennt) hier den Linien PM, P'M', P''M'' u. s. w. (Simson pflegt die ganze Linien Mm, M'm' u. s. w. Ordinaten, die Linien PM, P'M' u. s. w. hingegen halbe Ordinaten zu nennen.) Punkte der krummen Linie, wie M, M', M'' oder m, m', m'' werden mithin bestimmt durch die Dreyecke APM, AP'M' u. s. w. in welchem zuerst allgemein die Winkel P, P' und das Verhältniß der Seiten AP, PM; AP', P'M' (Verhältniß im allgemeinsten Sinn genommen) genommen) gegeben sind. Da aber durch 2 von einander unabhängige Data ein Dreyeck noch nicht bestimmt ist; so bleibt so lange die eigentliche Stelle jedes der Punkte M, M' u. s. w. noch unbestimmt, man weiß nur so viel, daß sie irgedwo auf der durch die Gleichung angegebenen krummen Linie, die deswegen auch der geometrische Ort dieser Punkte heißt, liegen müssen. Erst durch nähere Bestimmung eines dritten Stücks, z. B. der Seite AP, AP' wird die Stelle der Punkte M, M' oder m, m' ganz bestimmt.

Hiebey kann noch die Lage der Abscissenlinie, der Anfangspunkt der Abscissen, und der Winkel, den die Coordinaten mit einander machen, anfänglich willkührlich gewählt werden. Aber man wird für dieselbe krumme Linie verschiedene Gleichungen erhalten, je nachdem man jene Grundlagen so oder anders festsetzt. So z. B. war oben bey dem Kreise ein Durchmesser zur Abscissenlinie, ein Endpunkt des Durchmessers zum Anfangspunkt der Abscissen, und der rechte Winkel als Coordinatenwinkel gewählt worden. Inzwischen hätte diß alles nicht nothwendig so seyn müssen. Man hätte z. B. eine einfachere Gleichung erhalten, wenn man die Abscissen von dem Mittelpunkt C aus gerechnet hätte. So nemlich wäre, wenn man $CP = v$ gesetzt hätte, gewesen: $v^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, oder $y^2 = \frac{a^2}{4} - v^2$. Hingegen wäre die Gleichung allgemeiner, zugleich aber auch verwickelter worden, wenn man irgend eine

andere mit AB parallele Linie EF zur Abscissenlinie (was nemlich auch die Lage von EF seyn mag; so ist sie immer mit irgend einem Durmesser AB parallel), und auf derselben E zum Anfangspunkt der Abscissen, und irgend einen gegebenen Winkel F zum Ordinatenwinkel angenommen hätte. Heißt nemlich dann die Abscisse EF = t, die Ordinate FM = u, verlängert man MP, bis sie der Linie EF in G begegnet, und fällt man von E auf AB das Perpendikel ED, und nennt man AD = b, ED = PG = c; so ist t = EG + GF = b + x + GF. Aber GF : $\left\{ {FM \atop u} \right\}$ = cosin F : sin tot, mithin GF = $\frac{u.\text{cosin } F}{\text{sin tot}}$, foglich t = b + x + $\frac{u.\text{cosin } F}{\text{sin tot}}$ oder x = t — b — $\frac{u.\text{cosin } F}{\text{sin tot}}$. Und da GM = c + y, aber auch GM : $\left\{ {FM \atop u} \right\}$ = sin F : sin. tot; so ist c + y = $\frac{u.\text{sin } F}{\text{sin. tot}}$, oder y = $\frac{u.\text{sin } F}{\text{sin. tot}}$ — c. Setzt man diese Werthe von x und y in obige Gleichung $y^2 = ax - x^2$; so erhält man

$$u^2 - \frac{2\,ut.\text{cosin } F}{\text{sin tot}} + t^2 + \frac{u\,((a + 2b)\,\text{cosin } F - 2c\,\text{sin } F)}{\text{sin. tot}}$$
$$- t\,(a + 2b) + c^2 + b^2 + ab = 0.$$

Schon aus diesem Beyspiel erhellet, wie trigonometrische Funktionen in solche Gleichungen, die die Natur einer krummen Linie bestimmen, hereinkommen können. Wäre der Winkel F ein rechter; so würde die allgemeine Gleichung des Kreises für rechtwinklichte Coordinaten, indem man cosin F = o, sin F = sin.tot setzte: $u^2 + t^2 - 2cu - (a + 2b)\,t + c^2 + b^2 + ab = 0$.

Auch auf die Kegelschnitte hat man, besonders seit Eulers Zeiten eine analytisch- oder algebraisch-trigonometrische Behandlung angewendet.

Uebrigens, wie man die Punkte M, M' u. s. w. durch die Dreyecke APM, oder EFM u. s. w. bestimmen kann, in welchen die Winkel P oder F konstant, und für die veränderliche Seiten AP, oder EF das Verhältniß der korrespondirenden Seiten PM,

FM durch eine Gleichung gegeben ist; so könnte, wie man leicht sieht, auch irgend ein anderes Bestimmungsstück dieser Dreyecke z. B. eine Seite als konstant angenommen, und das Verhältniß von 2 andern veränderlichen Stücken durch eine Gleichung angegeben, und dadurch die Punkte M, M' eben sowohl bestimmt werden. So könnte man z. B. zur Bestimmung der Punkte M, M' die Dreyecke ACM, ACM' u. s. w. brauchen, und in denselben AC als konstant $= \frac{a}{2}$ betrachten, hingegen zwischen den Winkeln ACM, ACM' u. s. w. und den gegenüberstehenden Seiten AM, AM' das Stattfindende Verhältniß durch eine Gleichung ausdrücken. Man hätte nemlich, weil AM die Sehne des Winkels ACM, oder der doppelte Sinus des halben Winkels ACM für den Halbmesser AC ist: $\frac{AM}{2} : AC = \sin \frac{ACM}{2} : \text{sin. tot}$, oder, wenn man AM $= w$, APM $= \gamma$, AC wie oben $= \frac{a}{2}$ setzt $w : a = \sin \frac{\gamma}{2} : \text{sin. tot}$ mithin $w = \frac{a. \sin \frac{\gamma}{2}}{\text{sin. tot.}}$. Hier wären die Linien AM, AM'... und die korrespondirende Winkel ACM, ACM'.... als Coordinaten zu einander zu betrachten. So sieht man leicht, daß man die Natur einer krummen Linie auf sehr viele verschiedene Arten durch Gleichungen ausdrücken könnte. So könnte man z. B. auch noch eine Seite eines Dreyecks als konstant annehmen, und dann die Summe, den Unterschied, das Verhältniß der beyden übrigen Seiten, oder ihrer Quadrate, oder das aus ihnen gebildete Rechteck als gegeben, oder durch weitere nähere Angaben bestimmt betrachten, und auf diese Art den Ort der gegenüberstehenden Spitze des Dreyecks bestimmen. Man könnte selbst, wenn man die Sache noch mehr verallgemeinern wollte, statt der Dreyecke, Vierecke oder sonst beliebige Vielecke brauchen, in denen ein Bestimmungsstück fehlte, so daß mithin die Stelle eines vermittelst derselben zu bestimmenden Punkts noch irgendwo in einer durch die Natur der Angaben bestimmten krummen Linie liegen könnte. Endlich liessen sich begreiflich selbst auch krumme Linien als Abscissenlinien oder Ordinaten anwenden.

§. 2.

Um die Natur einer krummen Linie, also namentlich eines Kegelschnitts, zu welchen wir jetzt übergehen, durch eine Gleichung auszudrücken, muß man von irgend einer dieser krummen Linie ausschließlich zukommenden Eigenschaft ausgehen, und diese durch die Gleichung auszudrücken suchen. Je nachdem man eine Eigenschaft zum Grunde legt, erhält man verschiedene, mehr oder weniger einfache, für diesen oder jenen Zweck mehr oder weniger angemessene Gleichungen. So könnte man z. B. bey der Ellipse und Hyperbel eben so wie Simson, davon ausgehen, daß die Summe oder der Unterschied der aus einem beliebigen Punkt dieser Linien an die Brennpunkte gezogenen Linien gleich seye einer konstanten Linie, nemlich der großen Axe. So liesse sich bey der Parabel Fig. 1. des 1sten B. die Sache so betrachten, es seyen in dem Viereck EBCG die Seite BC, die rechte Winkel bey B und E, und die Gleichheit der Linien EG, GC angegeben, man solle daraus den Ort des Punkts G ableiten. Die Gleichungen, die man auf diese Art erhalten würde, würden nun die Natur dieser krummen Linien vollständig ausdrucken. Für die algebraische Behandlung ist jedoch eine der einfachsten Arten folgende. Man nimmt bey der Parabel die Axe, bey der Ellipse die große Axe, bey der Hyperbel die Zwerg-Axe als Abscissen-Linie an, und rechnet die Abscissen von dem Scheitel dieser Axen an, die Ordinaten nimmt man senkrecht auf die Abscissen. Hienach erhält man für die Parabel, wenn p der Haupt-Parameter heißt, nach unserm Isten B. 13. S. 1. Fall $y^2 = px$; für die Ellipse, wenn a die große, b die kleine Axe heißt, nach II. B. 7. S. $a^2 : b^2 = x(a-x) : y^2$, mithin $y^2 = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$, oder, wenn auch hier der Haupt-Parameter p heißt, weil $a : b = b : p$, mithin $p = \frac{b^2}{a}$, $y^2 = px - \frac{b^2x^2}{a^2} = px - \frac{px^2}{a}$; für die Hyperbel endlich, wenn a die Zwerg-Axe, b die zweyte Axe bedeutet, nach III. B. 8. S. $a^2 : b^2 = x(a+x) : y^2$, mithin $y^2 = \frac{b^2x}{a} +$

$\frac{b^2x^2}{a^2}$, oder, wenn man wieder den Haupt-Parameter p nennt, aus demselben Grund, wie bey der Ellipse: $y^2 = px + \frac{b^2x^2}{a^2} = px + \frac{px^2}{a}$. Man sieht sogleich, daß sich die Gleichungen für die Ellipse und die Hyperbel nur durch das Zeichen des letzten Glieds unterscheiden, und daß man sie in eine von folgender Form vereinigen kann: $y^2 = px \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$ oder $y^2 = px \mp \frac{px^2}{a}$. Ja selbst die Gleichung für die Parabel hat man sich unter derselben Form vorzustellen gesucht, indem man sich in derselben eine unendlich lange Haupt-Axe dachte, so daß alsdann das letzte Glied $\frac{px^2}{a}$ unendlich klein, oder als verschwindend gedacht werden müßte, wo dann offenbar die Gleichung auf die eigentliche Gleichung der Parabel $y^2 = px$ zurückkommen würde. Schon aus dieser Uebereinstimmung der Gleichungen für die 3. Kegelschnitte erhellet, daß sie, besonders die Ellipse und Hyperbel, sehr viele ähnliche Eigenschaften haben müssen.

§. 3.

Es ist hier nicht die Absicht, zu zeigen, wie aus diesen Gleichungen — die sich, wie man leicht sieht, auf ähnliche Weise, wie es §. 1. in Ansehung des Kreises gezeigt worden ist, umformen lassen, und in ihrem allgemeinsten Ausdruck folgende der §. 1. für den Kreis gefundenen ähnliche Gestalt annehmen:

$$u^2 + A.u.t + Bt^2 + Cu + Dt + E = 0$$

weßwegen sie auch krumme Linien des zweyten Grads heissen — die übrigen gemeinschaftlichen oder besondern Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt werden können. Nur ein paar Beyspiele mögen zur Erläuterung dienen.

Es seye z. B. verlangt, eine Berührungslinie an die Parabel zu ziehen. Es seye Fig. 39. eine Parabel ECF, ihre Axe, AD, ihr Haupt-Parameter p. Man denke sich nun zuerst eine gerade Linie ECF, die die Parabel in E, C, die Axe aber in F

schneide, von C, E seyen auf die Axe die Perpendikel CB, ED gefällt, und es heisse FA $= z$, AB $= x$, AD $= X$, CB $= y$, ED $= Y$; so ist nach §. 2. $y^2 = px$, und $Y^2 = pX$, mithin $Y^2 : y^2 = X : x$, oder $Y^2 - y^2 : y^2 = X - x : x$, aber wegen der ähnlichen Dreyecke FBC, FDE ist FB : FD $=$ CB : DE d. i. $z + x : z + X = y : Y$, mithin $z + x : X - x = y : Y - y$ oder $z + x : X - x = y(y + Y) : Y^2 - y^2$, aber nach dem Vorhergehenden ist $X - x : x = Y^2 - y^2 : y^2$, folglich $z + x : x = y(y + Y) : y^2$. Soll nun die Linie EF, statt die Parabel zu schneiden, sie nur berühren; so müssen die Punkte E, C, mithin die Linien CB, DE zusammenfallen, oder es muß $y = Y$ seyn. Setzt man nun in obiger Formel $y = Y$; so ist $z + x : x = 2y^2 : y^2 = 2 : 1$, mithin muß $z + x = 2x$, oder $z = x$ seyn. Diß heißt also so viel: das Stück der Axe AF zwischen dem Scheitel und der Tangente ist immer gleich der Abscisse AB, woraus dann die Art, an einen gegebenen Punkt C einer Parabel eine Tangente zu ziehen, sich von selbst ergiebt. (Vergl. I. B. 7. Satz, 8. Zus.)

§. 4.

Wollte man eben so an eine Ellipse eine Tangente ziehen; so könnte man so verfahren. Es seye Fig. 40. eine Ellipse AEF, ihre große Axe seye $= a$, die kleine Axe $= b$, sie werde von einer Linie HEF in E, F geschnitten, und HF begegne der großen Axe AB in H. Man fälle aus E, F auf die große Axe die Perpendikel ED, FG, und es seye HA $= z$, AD $= x$, AG $= X$, ED $= y$, FG $= Y$; so ist nach §. 2. $y^2 = \frac{b^2(a - x)x}{a^2}$ und eben so $Y^2 = \frac{b^2(a - X)X}{a^2}$, mithin

$$Y^2 : y^2 = (a - X)X : (a - x)x, \text{ mithin}$$
$$Y^2 - y^2 : y^2 = aX - X^2 - ax + x^2 : (a - x)x$$
$$= a(X - x) - (X + x)(X - x) : (a - x)x$$
$$= (X - x)(a - (X + x)) : (a - x)x$$

Es ist aber auch, wegen der ähnlichen Dreyecke HED, HFG, ED : FG = HD : HG d. h.
$y : Y = z + x : z + X$, mithin
$y : Y - y = z + x : X - x$, oder
$y(y + Y) : Y^2 - y^2 = z + x : X - x$. Aber nach dem Vorherg. $Y^2 - y^2 : y^2 = (X - x)(a - (X + x)) : (a - x)x$, mithin $y(y + Y) : y^2 = (z + x)(a - (X + x)) : (a - x)x$. Soll nun die Linie EF die Ellipse, statt sie zu schneiden, in E berühren; so müßen die Puukte E, F, zusammenfallen, und es muß $X = x$, $Y = y$ seyn. Setzt man dieß in obiger Formel; so erhält man $2y^2 : y^2 = (z + x)(a - 2x) : (a - x)x$
oder $2 : 1 = (z + x)(a - 2x) : (a - x)x$, oder
$1 : 1 = (z + x)(\frac{a}{2} - x) : (a - x)x$, folglich muß
$(z + x)(\frac{a}{2} - x) = (a - x)x$, oder $z + x = \dfrac{(a - x)x}{\frac{a}{2} - x}$ seyn, d. h. die Subtangente HD ist immer die 4te Proportionallinie zu dem Stück CD zwischen dem Mittelpunkt und der Ordinate, und zu den beyden Stücken AD, BD, in welche die Ordinate die große Axe theilet. (Vgl. II. B. 11. S. 8. 3.) Wenn $\frac{a}{2} - x = 0$ wird, d. h. wenn eine Tangente an einen Endpunkt der kleinen Axe gezogen werden soll; so wird $z + x$, unendlich groß, d. h. eine solche Tangente schneidet die große Axe gar nicht, sie ist mit ihr parallel. Um die Tangente an einem Endpunkt der großen Axe zu finden, dürfte man nur allgemein untersuchen, in welcher Entfernung von der grossen Axe eine Tagente ein in einem bestimmten Punkt der großen Axe darauf errichtetes Perpendikel z. B. die kleine Axe schneiden werde. Gesetzt z. B. es schneide die kleine Axe in einer Entfernung vom Mittelpunkt $= w$; so hat man $z + x : y = z + \frac{a}{2} : w$, oder
$(z + x)^2 : y^2 = (z + \frac{a}{2})^2 : w^2$, oder
$\left(\dfrac{(a - x)x}{\frac{a}{2} - x}\right)^2 : \dfrac{b^2 : (a - x)x}{a^2} = (z + \frac{a}{2})^2 : w^2$, d. i.
$\dfrac{(a - x)x}{(\frac{a}{2} - x)^2} : \dfrac{b^2}{a^2} = (z + \frac{a}{2})^2 : w^2$. Da nun für den Fall, wenn

die Tangente an einen Endpunkt der großen Axe gezogen ist, entweder $x = o$, oder $a - x = o$, mithin immer das erste Glied $= o$ wird; so wird das letzte unendlich groß, mithin schneidet in diesem Fall die Tangente die kleine Axe nicht, d. h. sie ist damit parallel. Auf ähnliche Art erhält man für die Parabel, daß ihre Tangente am Hauptscheitel senkrecht auf der Axe seyn.

§. 5.

Durch eine mit der im vorigen §. völlig ähnliche Behandlung erhält man nun für die Hyperbel, wenn a ihre Zwergaxe, und z, x dasselbe wie vorhin, mithin $z + x$ die Subtangente bedeutet: $(z + x)\ (\frac{a}{2} + x) = (a + x)\ x$ oder $z + x = \frac{(a + x)x}{\frac{a}{2} + x}$ Vgl. III. B. 39 S. 5. Z.

Auch hätte man, wie man leicht sieht, die Formel für die Parabel und Hyperbel aus der für die Ellipse $z + x = \frac{(a - x)x}{\frac{a}{2} - x}$ ableiten können, nämlich die für die Parabel, indem man a unendlich groß gesetzt hätte, wo man dann erhalten hätte: $z + x = \frac{a\,x}{\frac{a}{2}} = 2x$, die für die Hyperbel, indem man z und x negativ gesetzt hätte (weil sie nämlich von dem Anfangspunkt der Axe an gegen diese eine entgegengesetzte Lage haben) wodurch man erhalten hätte $-(z + x) = \frac{(a + x)x}{\frac{a}{2} + x}$, was bis auf das Zeichen von $(z + x)$ mit dem im Anfang dieses §. Gesagten übereinstimmt. Dieser Unterschied der Zeichen rührt daher, weil man im Anfang des §. die Subtangente der Hyperbel absolut, ohne ihre Lage mit der Subtangente der Ellipse zu vergleichen bestimmte, am Ende des §. hingegen auf diese Vergleichung Rücksicht nahm, wobei dann allerdings die Subtangente in der Hyperbel von der Ordinate aus gegen den Mittelpunkt hin, in der Ellipse aber nach der entgegengesetzten Seite zu liegt.

Sonst giebt die Differential-Rechnung zur Bestimmung der

Subtangenten der krummen Linien überhaupt allgemeine Formeln an, die man aber, wie man sieht, so leicht sie auch sonst sind, für die Kegelschnitte entbehren kann.

§. 6.

Ist die Subtangente bestimmt; so läßt sich leicht die Tangente von der Axe an bestimmen, indem ihr Quadrat immer gleich ist der Summe der Quadrate der Subtangente und der Ordinate; ferner die Subnormallinie, die immer die 3te Proportional-Linie ist zu der Subtangente und der Ordinate; und die Normal-Linie, deren Quadrat gleich ist der Summe der Quadrate der Subnormallinie und der Ordinate (8, VI. E. nebst Zus.) So erhält man, um dieß einzige Beyspiel hievon anzuführen, in der Parabel sogleich die Subnormallinie $= \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}$ (Vgl. I. B. 7. Satz, 10. Zus.) in der Ellipse die Subnormallinie $= \frac{(\frac{a}{2} - x)b^2}{a^2} = \frac{(\frac{a}{2} - x)p}{a} = \frac{p}{2} - \frac{px}{a}$ (vgl. II. B. 11. S. 9. Z.) und in der Hyperbel die Subnormallinie $= \frac{(\frac{a}{2} + x)b^2}{a^2} = \frac{(\frac{a}{2} + x)p}{a} = \frac{p}{2} + \frac{px}{a}$ (vgl. III. B. 39. S. 7 Z.

§. 7.

Bringt man die hiebey vorkommende Winkel mit in Rechnung; so erhält man wieder andere, für verschiedene Zwecke brauchbare, Formeln.

Es seye z. B. Fig. 41. AB die große Axe $= 2a$, DE die kleine Axe $= 2b$, C seye der Mittelpunkt der Ellipse, FH eine Tangente an irgend einen Punkt F, FG die Ordinate $= y$, AG die Abscisse $= x$, FJ die Normallinie, die der kleinin Axe in K begegne, GJ die Subnormallinie, GH die Subtangente. Ueber AB als Durchmesser seye eine Kreis beschrieben, dem die verlängerte Linie FG in L begegne, und es seye noch CL gezogen, endlich heissen die Winkel FCA $= \alpha$, FJA $= \varphi$, LCA $= \rho$; so ist da nach §. 2. (wenn man für das dortige a jetzt 2a, für das dor-

tige b jetzt 2b setzt) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, aber nach der Natur des Kreises $GL^2 = AG \times GB = 2ax - x^2$ ist, $GL^2 : y^2 = a^2 : b^2$, mithin $GL : \left\{ \begin{matrix} FG \\ y \end{matrix} \right\} = a : b$, oder, weil für den Halbmesser CG die Linien GL, GF die Tangenten der Winkel ϱ, α sind, $\text{tang.}\,\varrho : \text{tang.}\,\alpha = a : b$. Und da für den Halbmesser FG die Linien GJ, GC die Cotangenten der Winkel φ, α sind; so ist $\text{cotang}\,\varphi : \text{cotang}\,\alpha$ d. i. $\text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\varphi = GJ : GC$. Aber nach §. 6. ist $GJ = \frac{(a-x)b^2}{a^2}$, und GC ist $= a - x$, mithin ist $\text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\varphi = b^2 : a^2$, und folglich $b : a = \text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\varrho = \text{tang}\,\varrho : \text{tang}\,\varphi$. Man kann mithin die Winkel α, ϱ als durch den Winkel φ bestimmt ansehen, und nun auch die vorkommenden Linien durch die Winkel α, ϱ, φ und durch die Axen 2a, 2b, d. h. im Grunde blos durch φ und 2a, 2b bestimmen. So erhält man, weil $GC : LC = \text{cosin}\,\varrho : \text{sin. tot}$,

$$GC = \frac{a.\,\text{cosin}\,\varrho}{\text{sin. tot}} \text{ und } AG = a - \frac{a.\,\text{cosin}\,\varrho}{\text{sin tot}};$$

ferner, weil $LC : LG = \text{sin. tot} : \text{sin}\,\varrho$, aber $LG : FG = a : b$, folglich $LC : FG = a.\,\text{sin. tot} : b.\,\text{sin}\,\varrho$ ist,

$$FG = \frac{b.\,\text{sin}\,\varrho}{\text{sin tot}};$$

ferner, weil $LC : LG = \text{sin. tot} : \text{sin}\,\varrho$, $LG : FG = a : b$, $FG : FC = \text{sin}\,\alpha : \text{sin tot}$, mithin $LC : FC = a.\,\text{sin}\,\alpha : b.\,\text{sin}\,\varrho$ ist,

$$FC = \frac{b.\,\text{sin}\,\varrho}{\text{sin}\,\alpha};$$

ferner, weil $FJ : FC = \text{sin}\,\alpha : \text{sin}\,\varphi$ ist,

$$FJ = \frac{b.\,\text{sin}\,\varrho}{\text{sin}\,\varphi};$$

ferner, weil $GJ : FJ = \text{cosin}\,\varphi : \text{sin tot}$ ist,

$$GJ = \frac{b.\,\text{sin}\,\varrho.\,\text{cosin}\,\varphi}{\text{sin. tot.sin}\,\varphi} = \frac{b.\,\text{sin}\,\varrho}{\text{tang}\,\varphi},$$

oder, weil $\text{tang}\,\varphi : \text{tang}\,\varrho = a : b$, mithin $\text{tang}\,\varphi = \frac{a.\,\text{tang}\,\varrho}{b}$ ist;

$$GJ = \frac{b.^2 \sin \rho}{a. \operatorname{tang} \rho} = \frac{b.^2 \operatorname{cosin} \rho}{a. \sin tot};$$

ferner, weil $HF : FJ = \operatorname{tang} \varphi : \sin tot$ ist,

$$HF = \frac{b. \sin \rho \operatorname{tang} \varphi}{\sin tot. \sin \varphi} = \frac{b. \sin \rho}{\operatorname{cosin} \varphi};$$

ferner, weil $HG : FG = \sin. tot : \operatorname{cotang} \varphi = \operatorname{tang} \varphi : \sin. tot.$ ist,

$$HG = \frac{b. \sin. \rho. \operatorname{tang}. \varphi}{\sin. tot.^2} = \frac{a. \sin. \rho. \operatorname{tang}. \rho}{\sin. tot.^2};$$

ferner

$$CJ = CG - GJ = \frac{(a^2 - b^2) \operatorname{cosin}. \rho}{a. \sin. tot.};$$

ferner, weil $CK : CJ = \operatorname{tang}. \varphi : \sin. tot.$ ist,

$$CK = \frac{(a^2 - b^2). \operatorname{cosin}. \rho \operatorname{tang}. \varphi}{a. \sin. tot.^2} = \frac{(a^2 - b^2) \operatorname{cosin}. \rho. \operatorname{tang}. \rho}{b. \sin. tot.^2};$$

endlich weil $FK : \begin{Bmatrix} FM \\ GC \end{Bmatrix} = \sin. tot. : \operatorname{cosin}. \varphi$ ist,

$$FK = \frac{a. \operatorname{cosin}. \rho}{\operatorname{cosin}. \varphi};$$

Alle diese Formeln finden sich in dem Berlin. astron. Jahrb. für 1788 von Pacassi angegeben, jedoch ohne Beweiß. Sie sind besonders in der mathematischen Geographie brauchbar, wo dann φ die Pohlhöhe eines Orts bedeutet.

Das bisherige mag hinreichen, um dem Anfänger im Allgemeinen einen Begriff von der analytischen und analytisch-trigonometrischen Behandlung der Kegelschnitte zu geben. Die ausführlichere Auseinandersetzung dieser Methoden findet sich in vielen allgemein bekannten Lehrbüchern, unter denen wir Kürze halber nur auf Karstens Lehrbegriff 7. Th., Tempelhoffs Analysis des Unendlichen, Hube Versuch einer analytischen Abhandlung über die Kegelschnitte, und besonders Klügels mathematisches Wörterbuch Artikel: Parabel, Ellipse, Hyperbel, Kegelschnitte, und Krumme Linien verweisen wollen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

III. B. Tab. III.

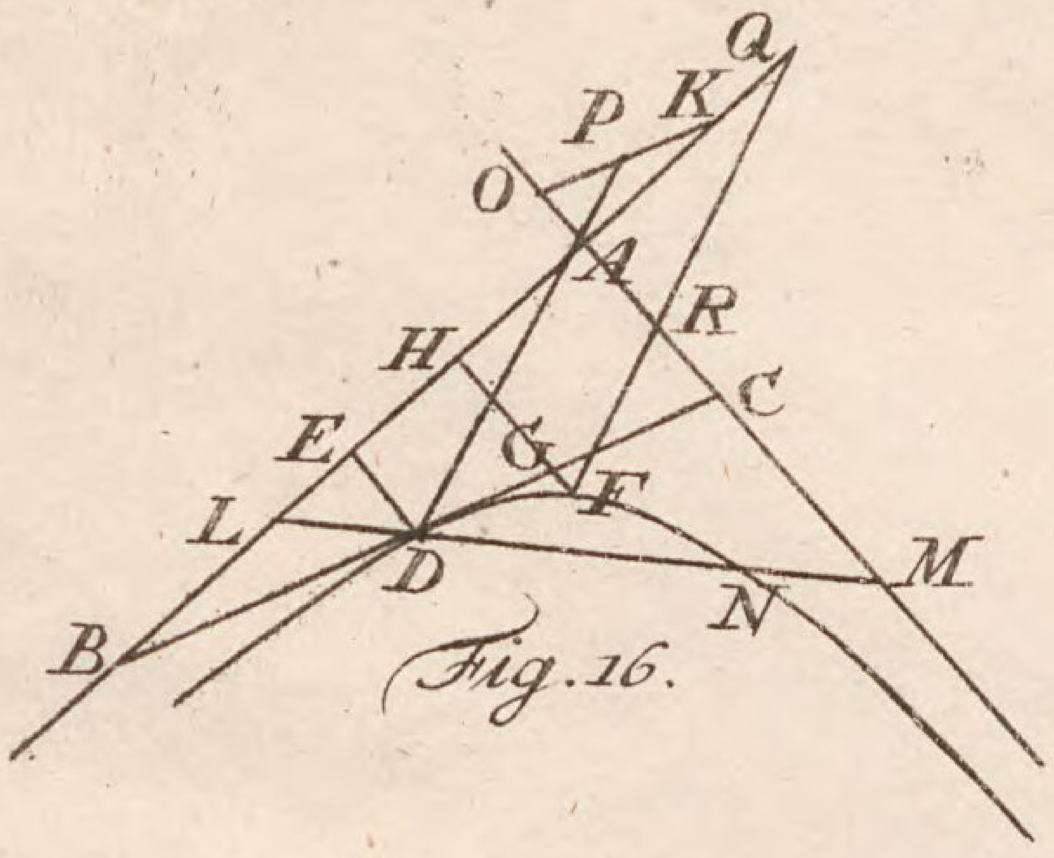


Fig. 16.

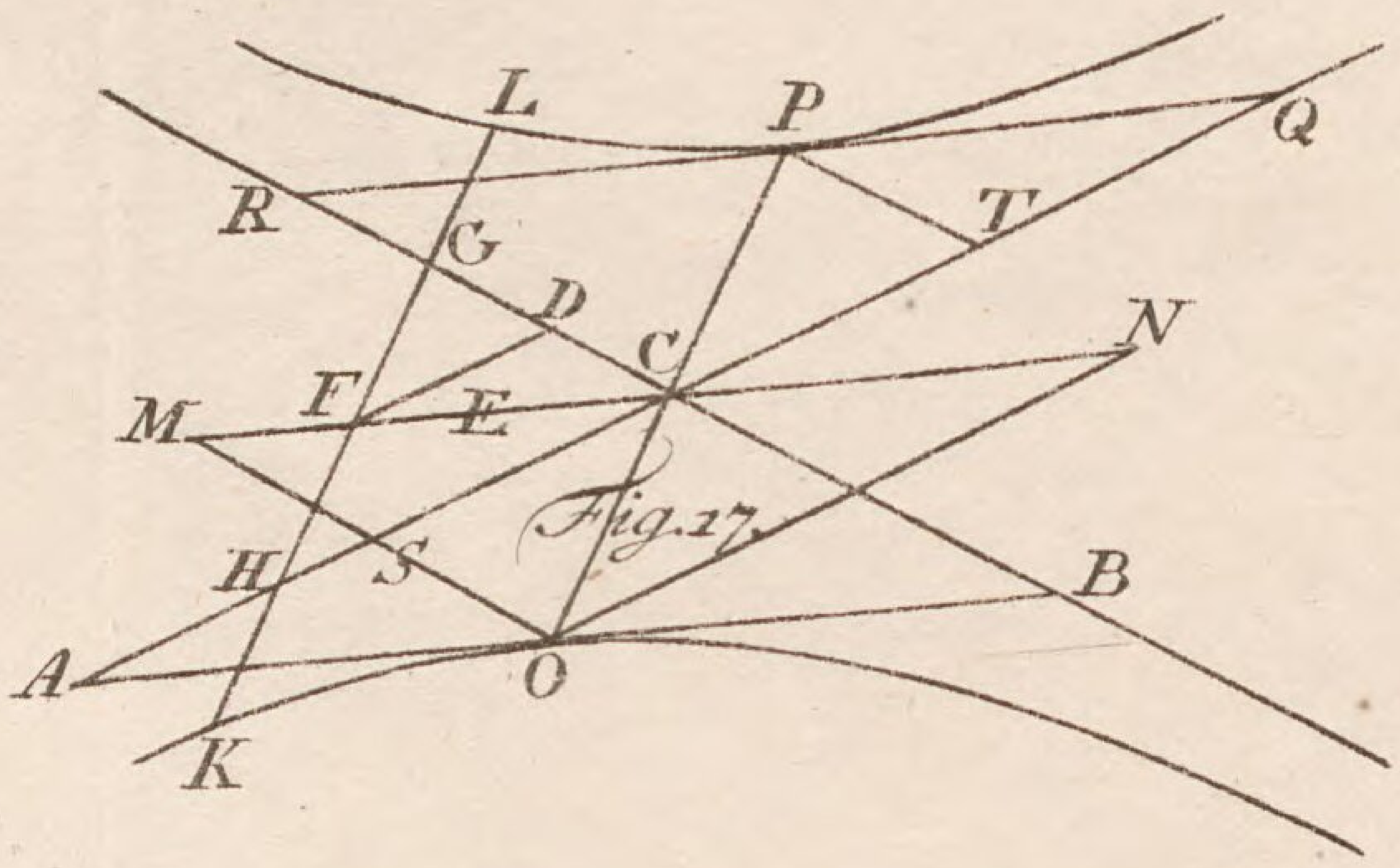


Fig. 17.

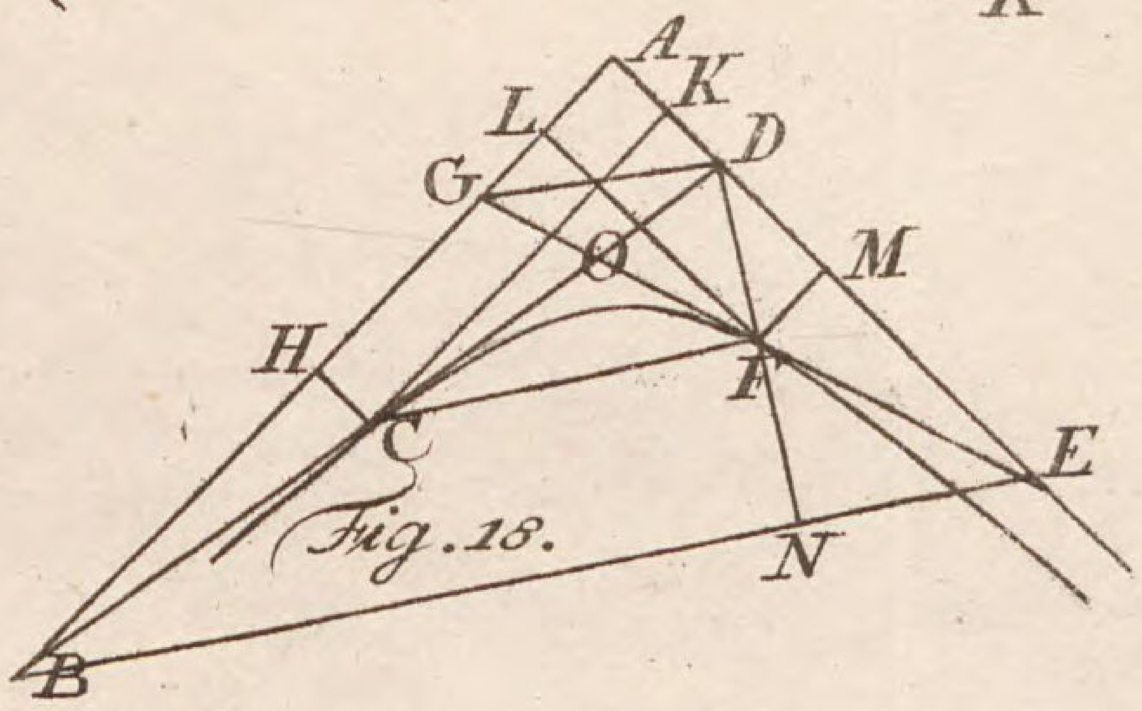


Fig. 18.

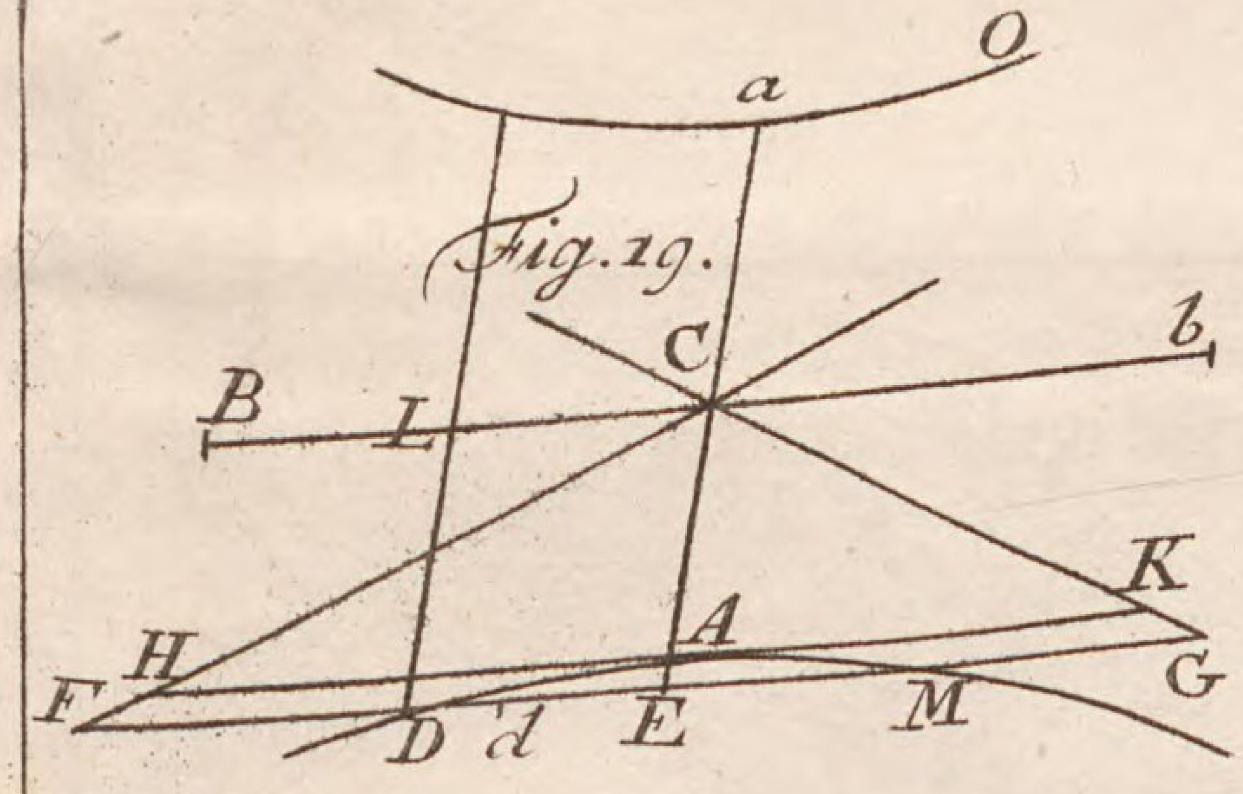


Fig. 19.

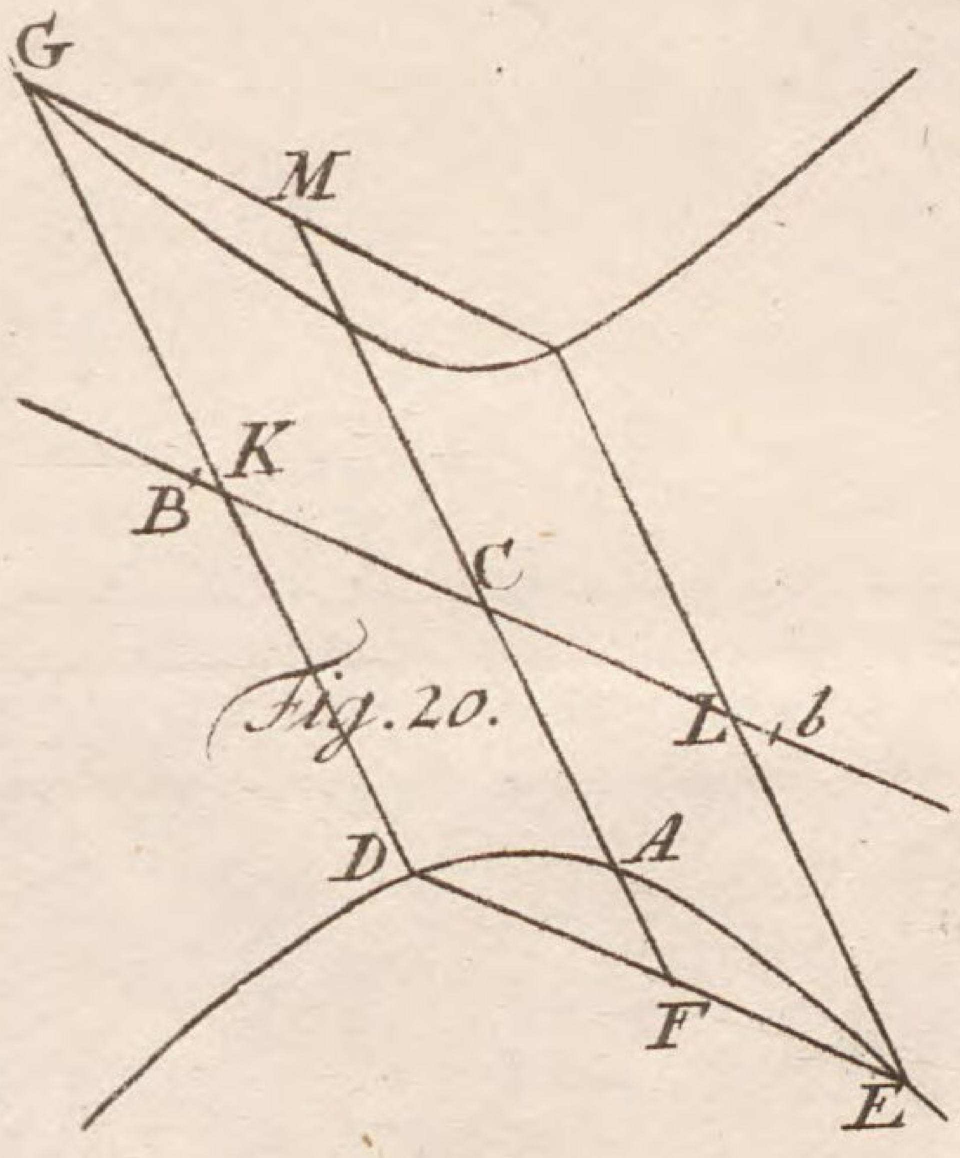


Fig. 20.

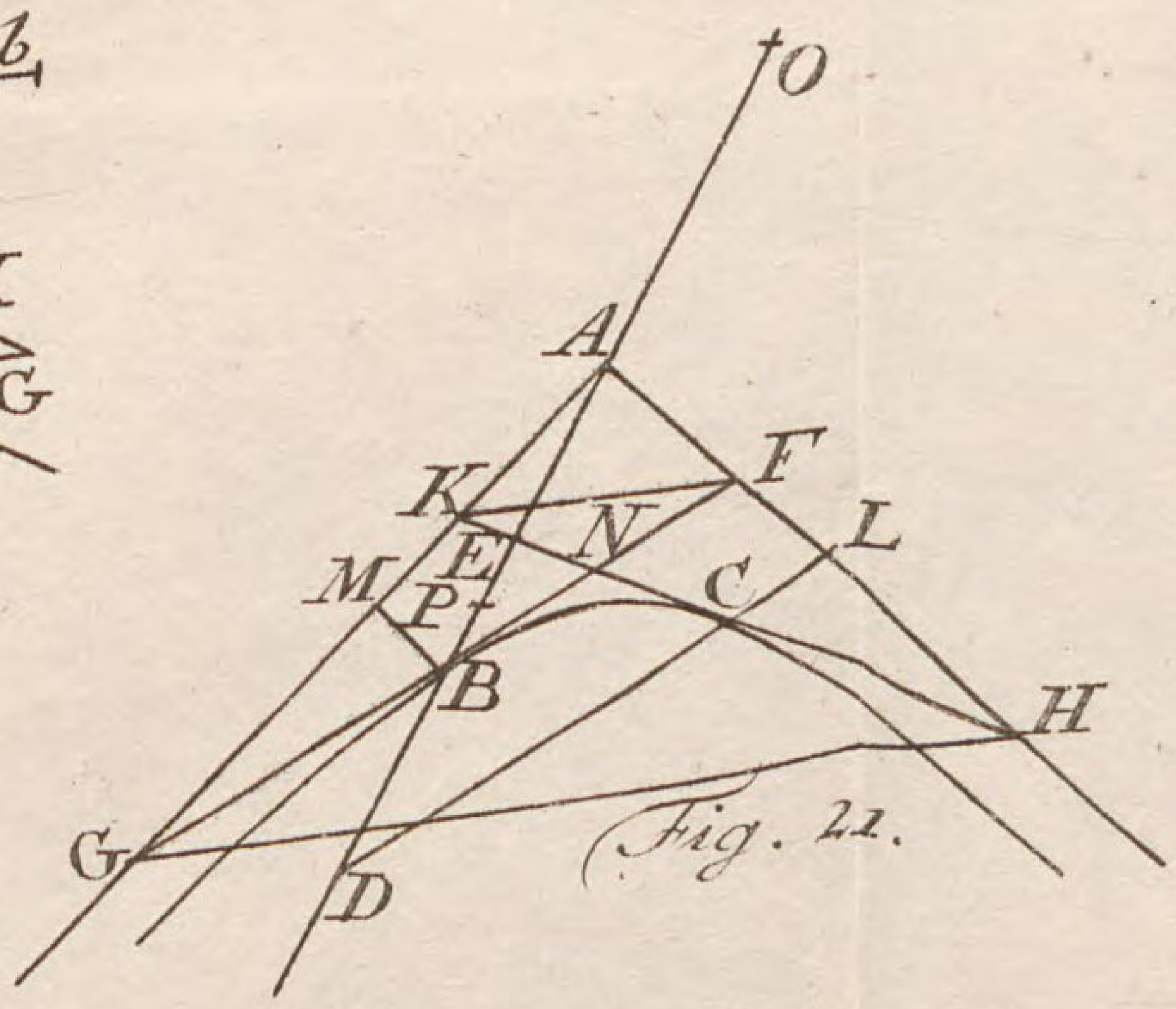


Fig. 21.

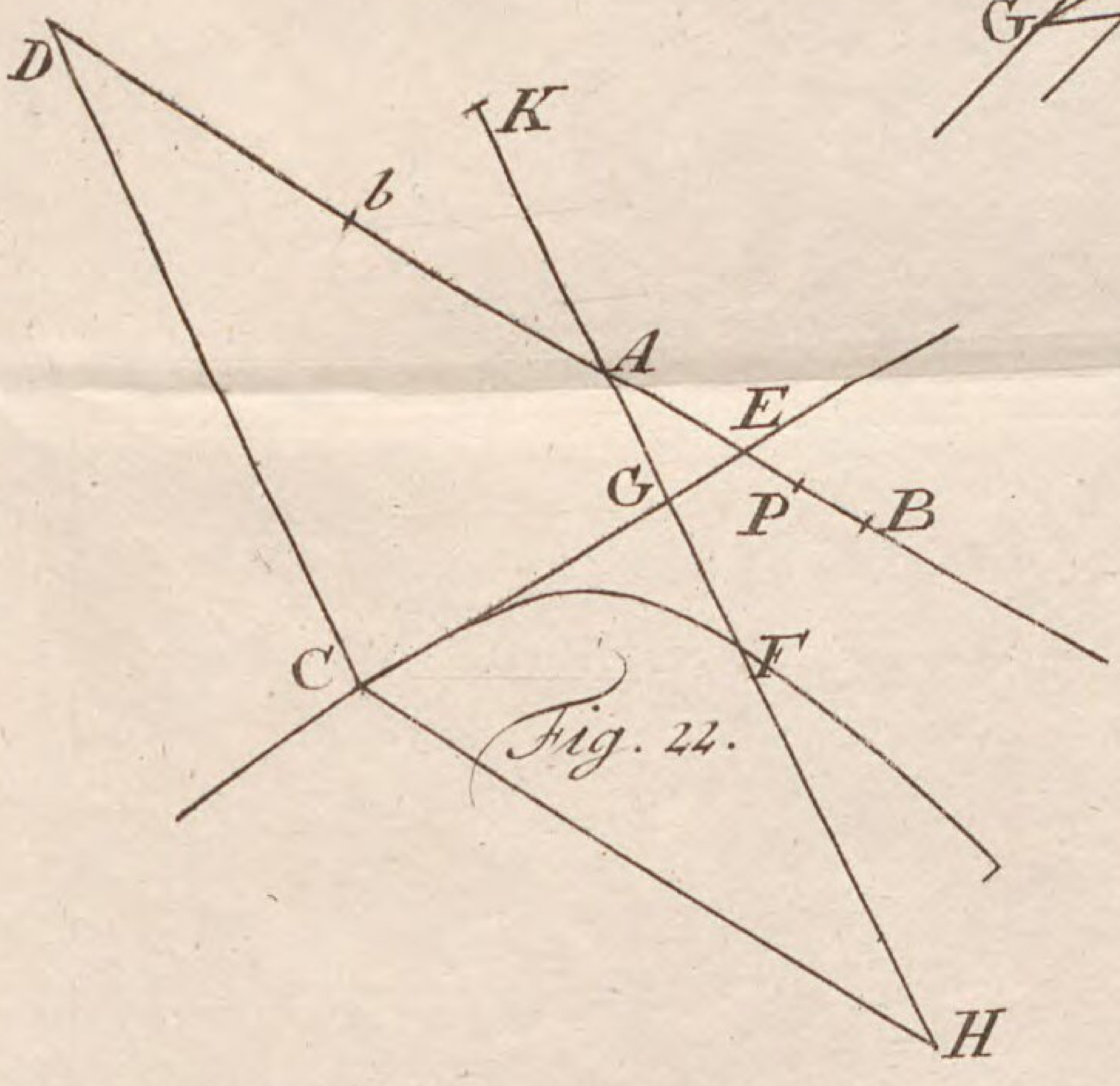


Fig. 22.

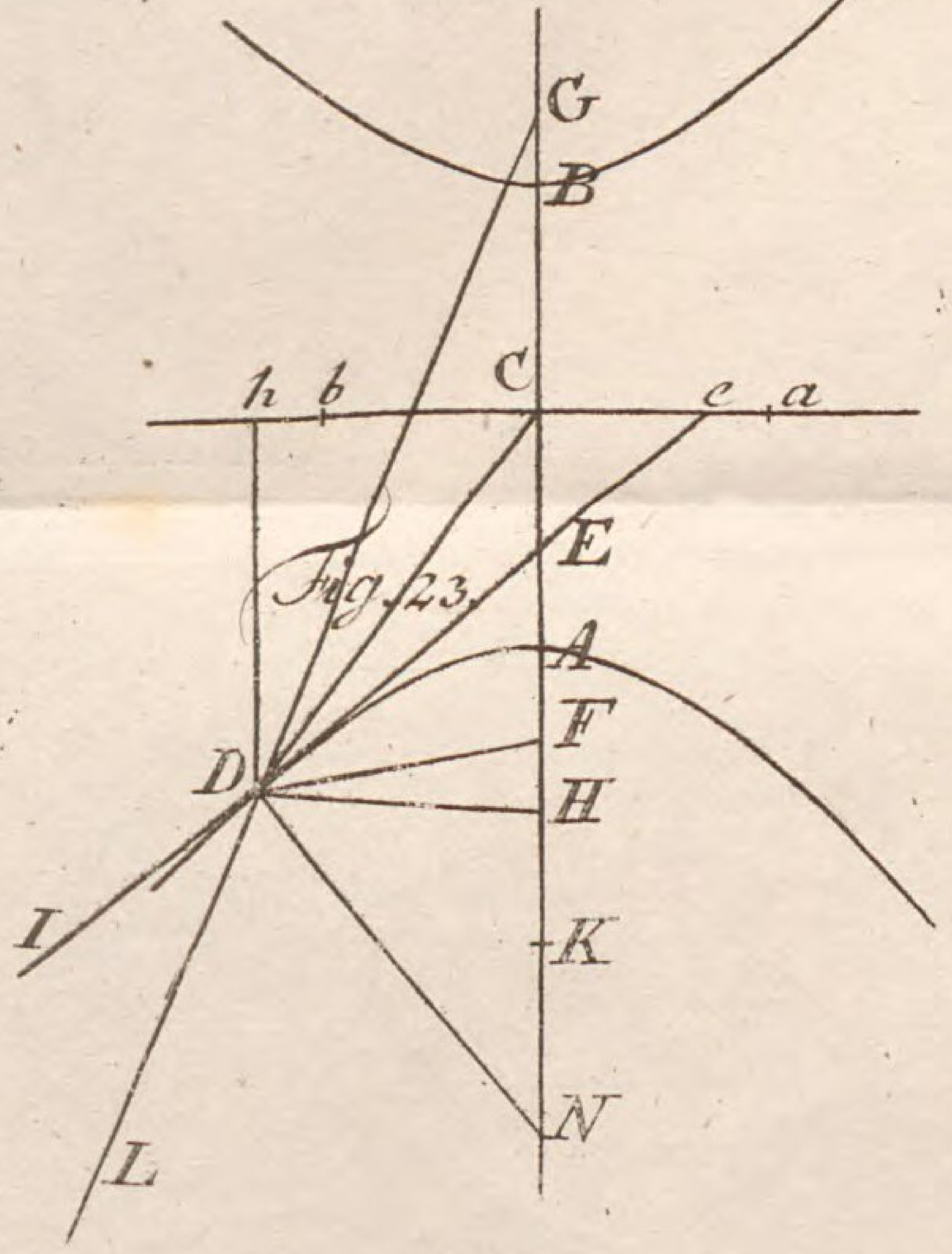


Fig. 23.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

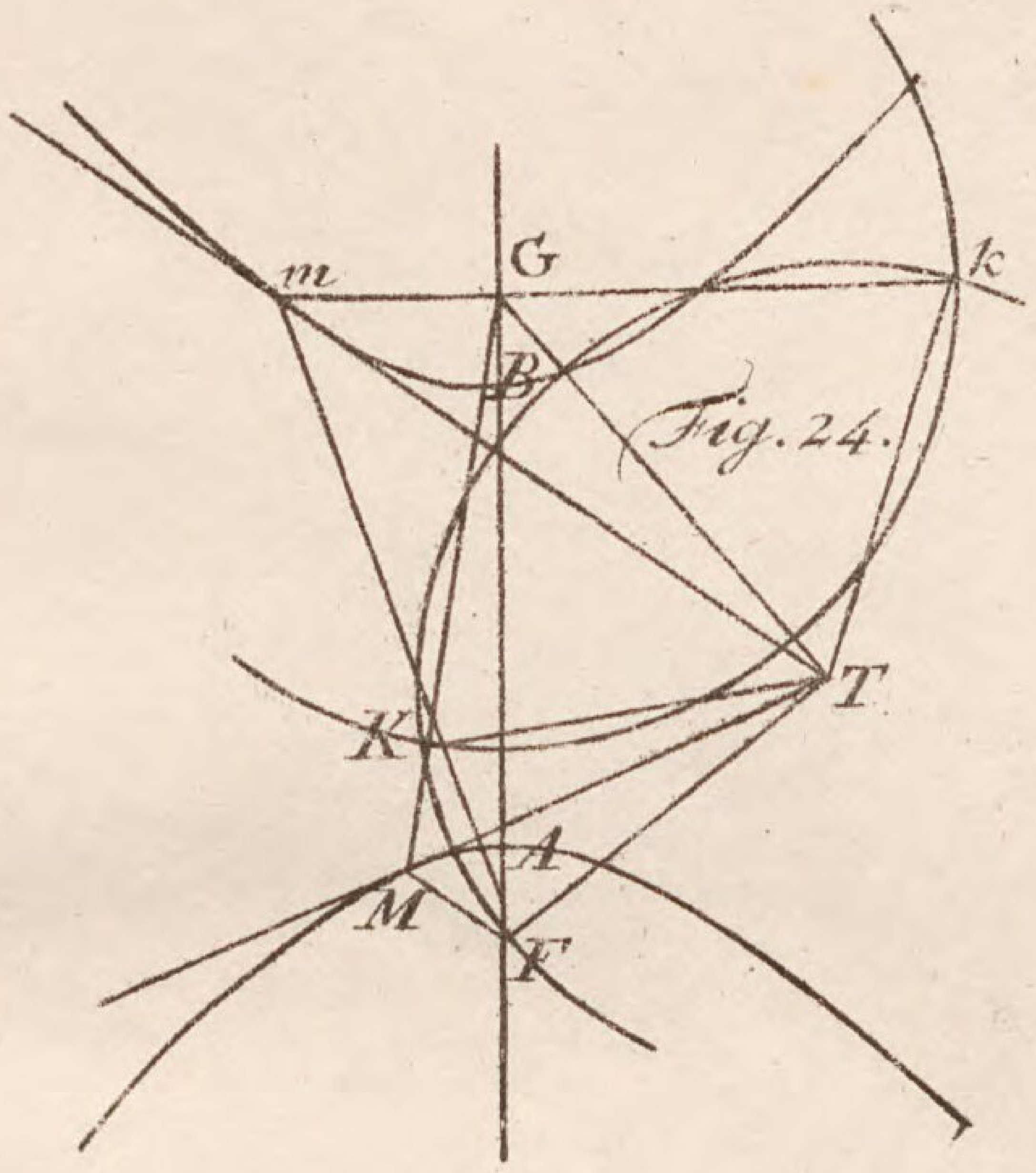


Fig. 24.

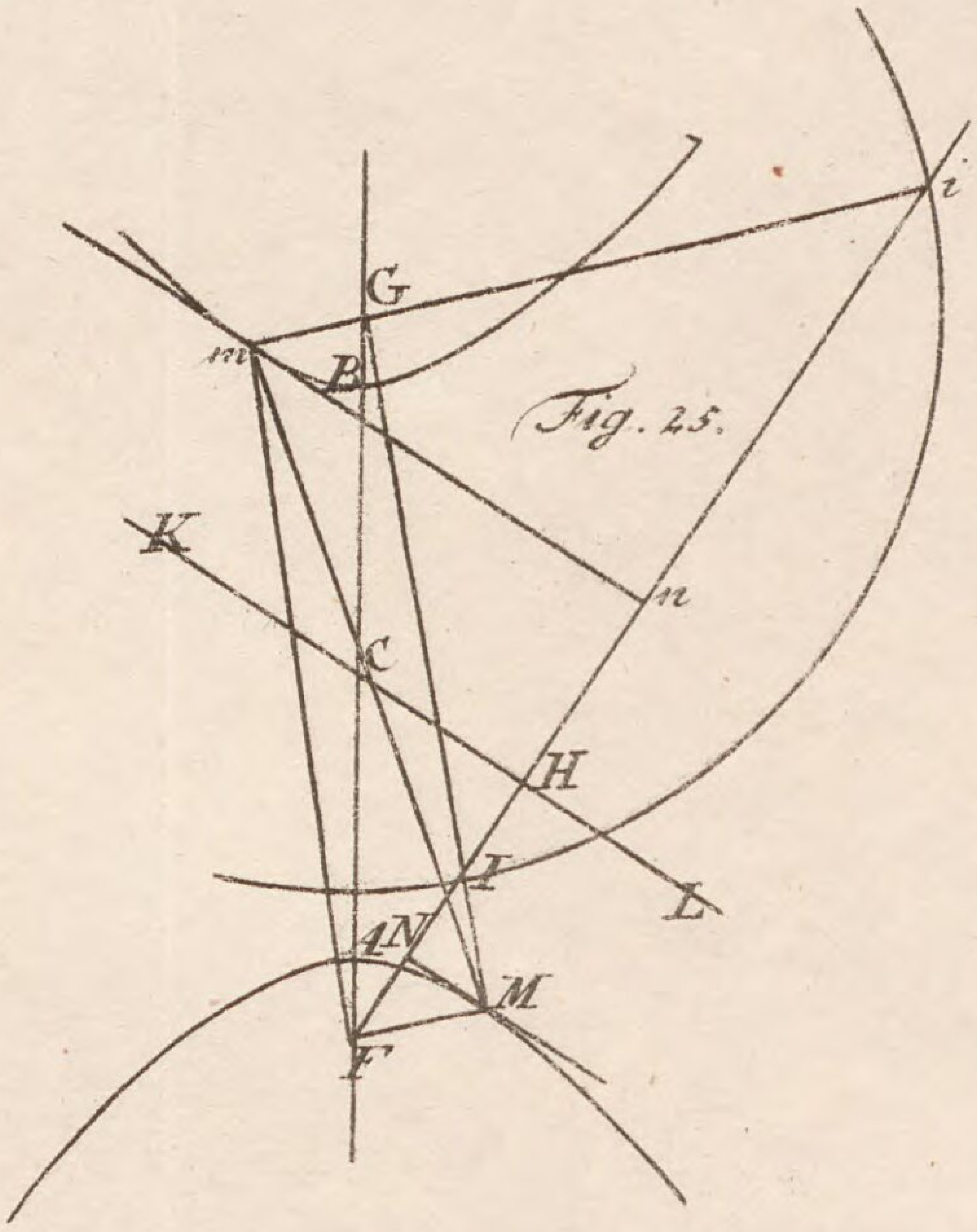


Fig. 25.

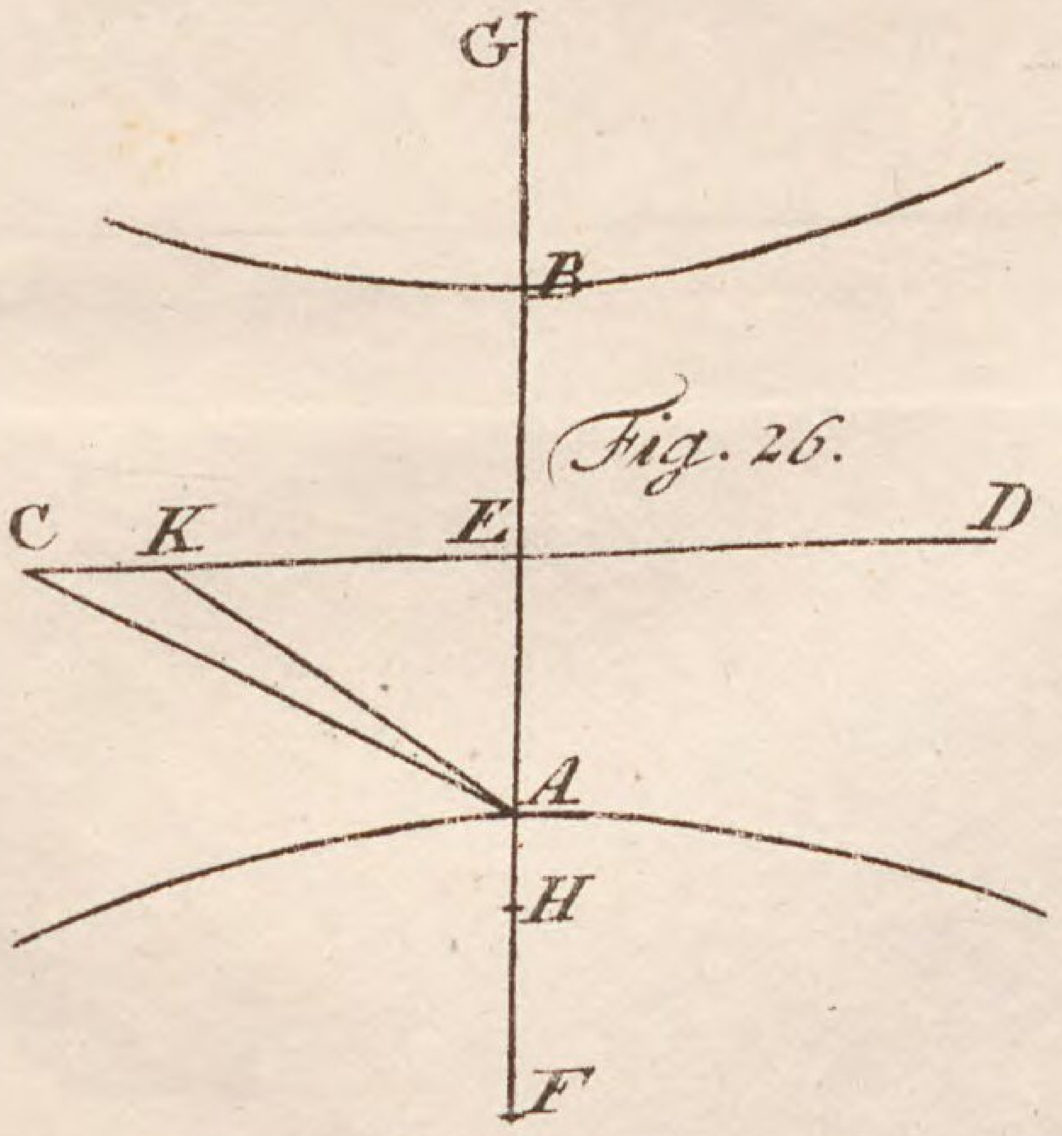


Fig. 26.

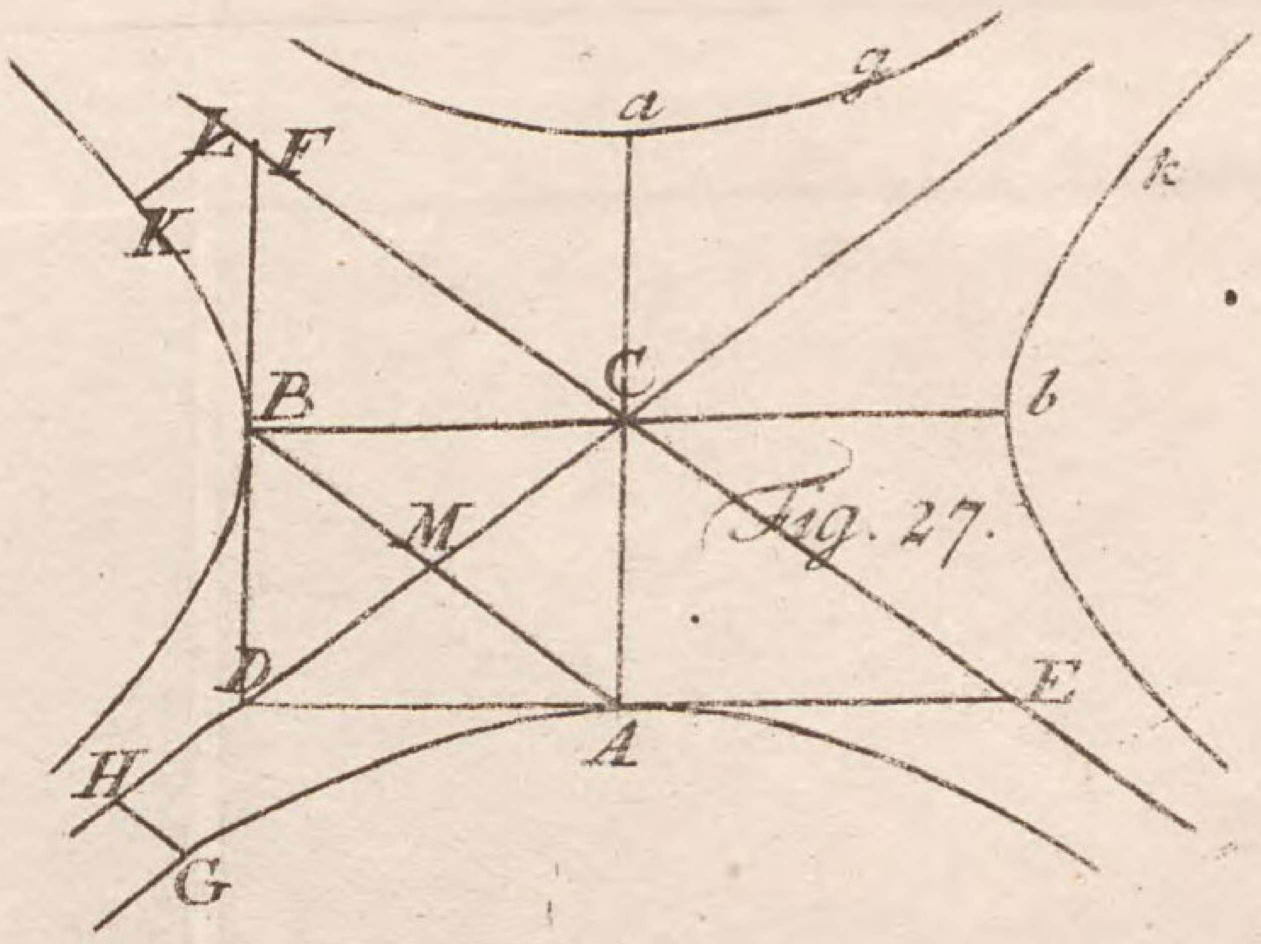


Fig. 27.

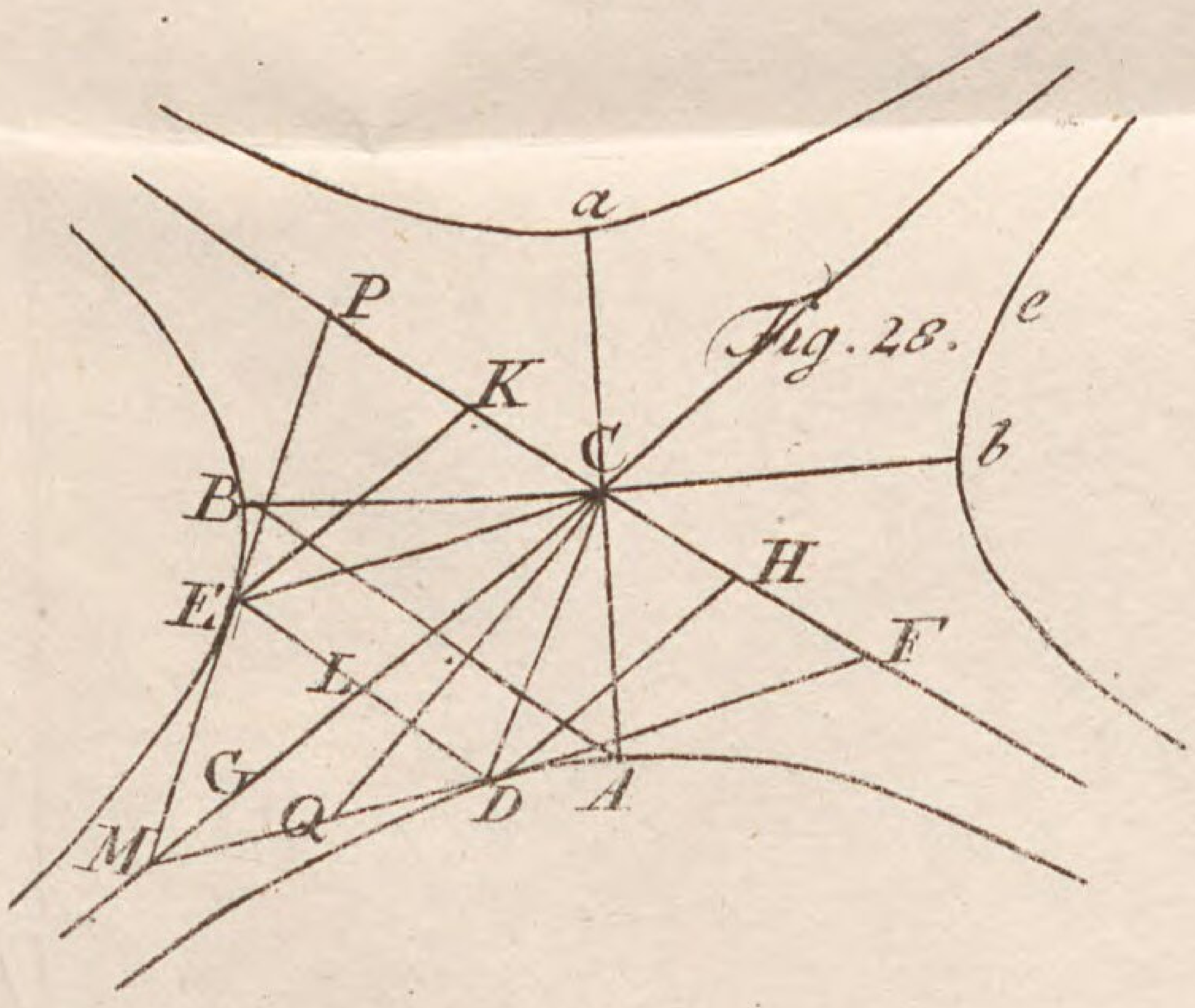


Fig. 28.

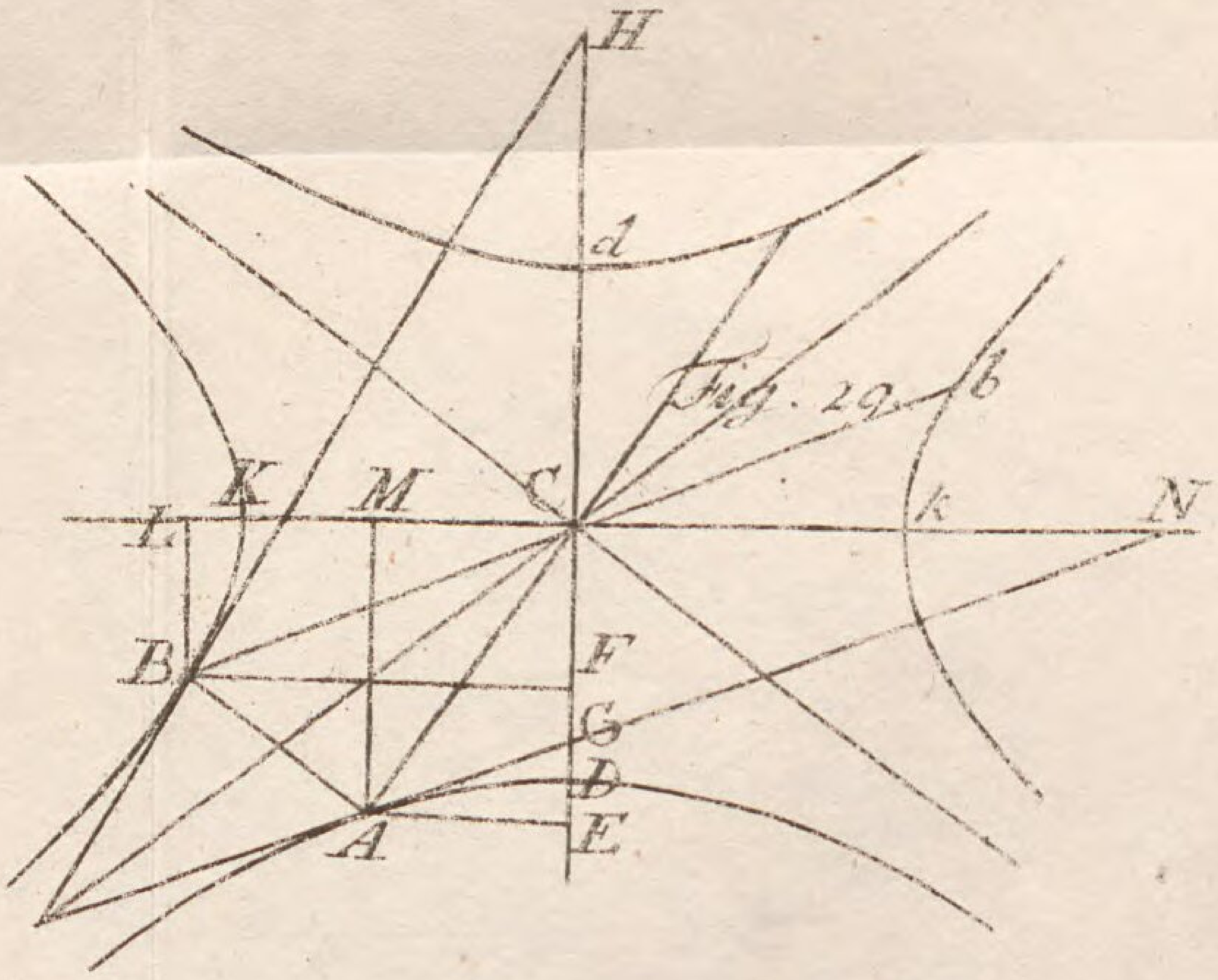


Fig. 29.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

III. B. Tab. V.

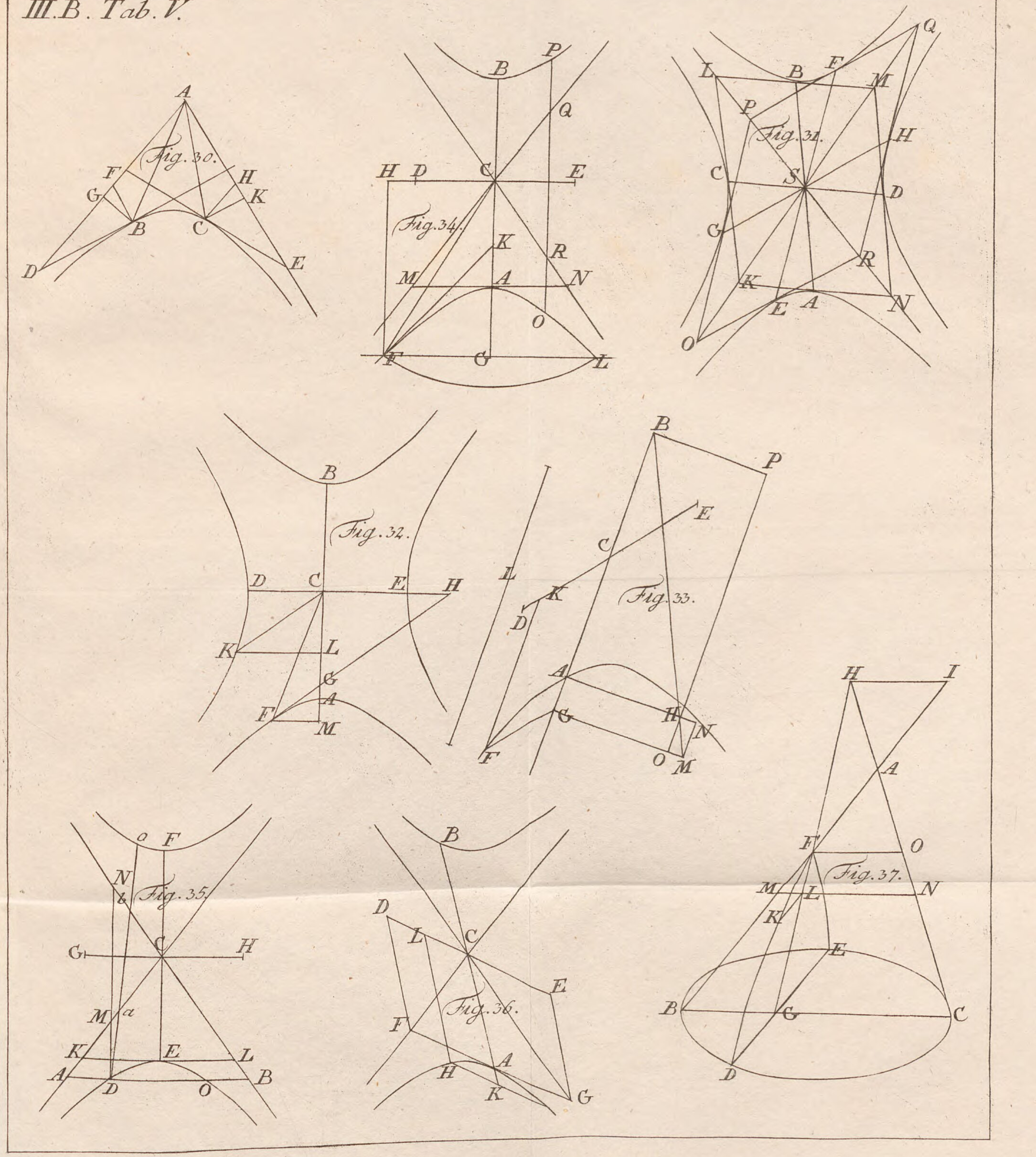


Fig. 30.
A
F
G
H
K
B
C
D
E
Fig. 34.
P
B
Q
H D C E
K
R
M A N
O
F G L
Fig. 31.
Q
L B F M
P
H
C S D
G
R
K E A N
O
Fig. 32.
B
D C E H
K L
G
A
F M
Fig. 33.
B
P
E
C
L
K
D
A
G
H N
F
O M
Fig. 35.
o F
N
b
G C H
M a
K E L
A D O B
Fig. 36.
B
D
L C
E
F
A
H
K
G
Fig. 37.
H I
A
F O
M L N
K
E
B G C
D

Bayerische
Staatsbibliothek
München

III. B. Tab. VI.

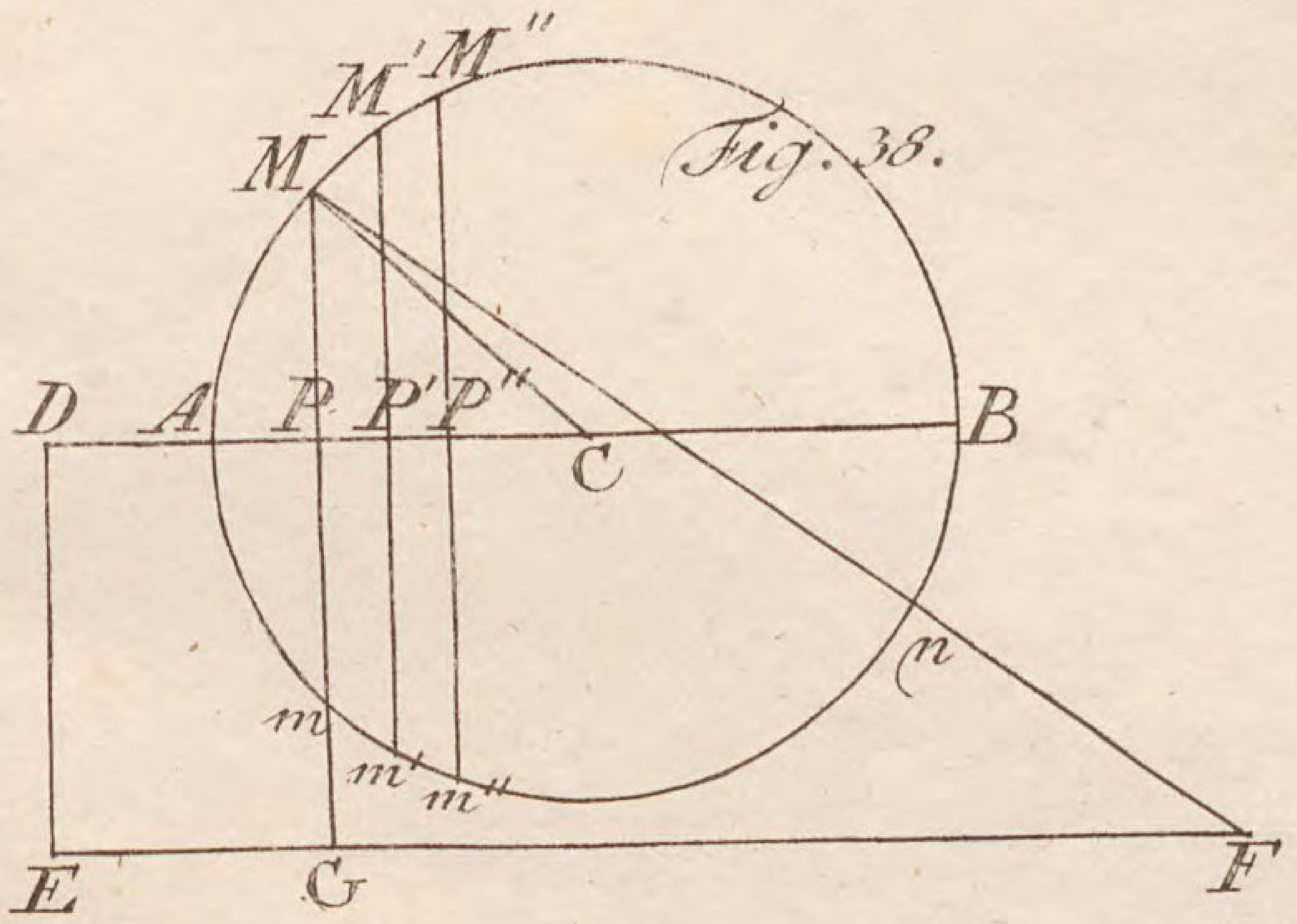


Fig. 38.

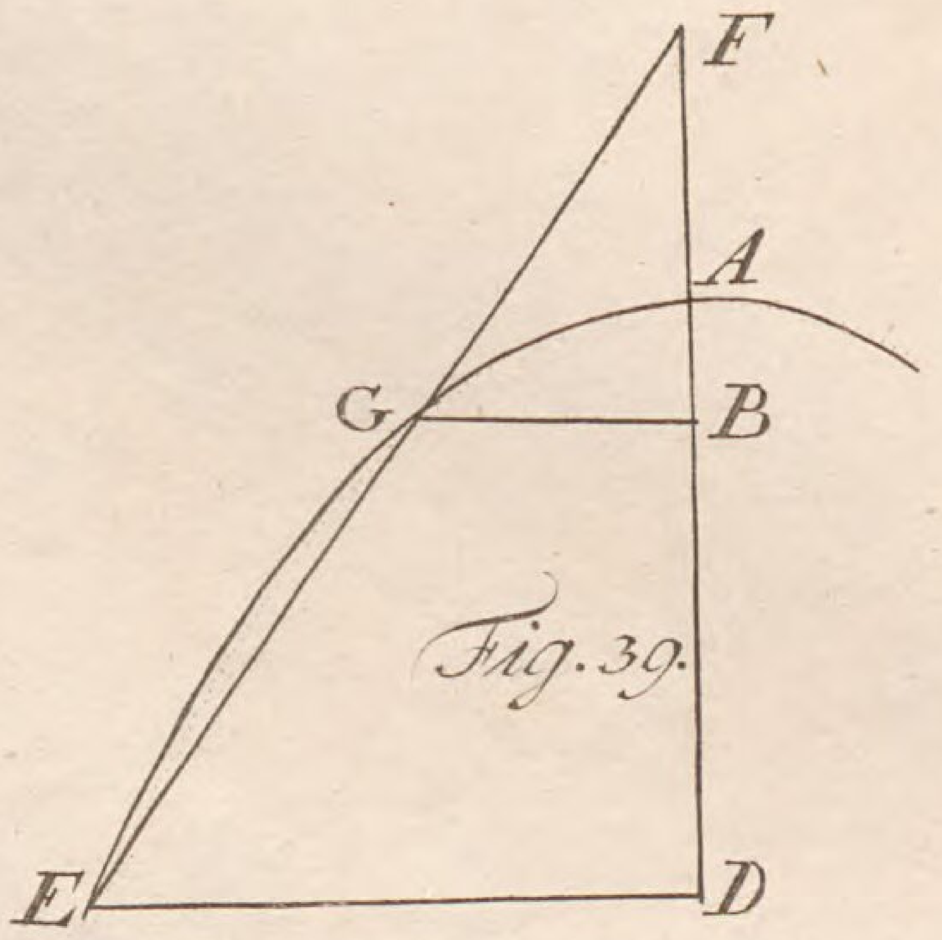


Fig. 39.

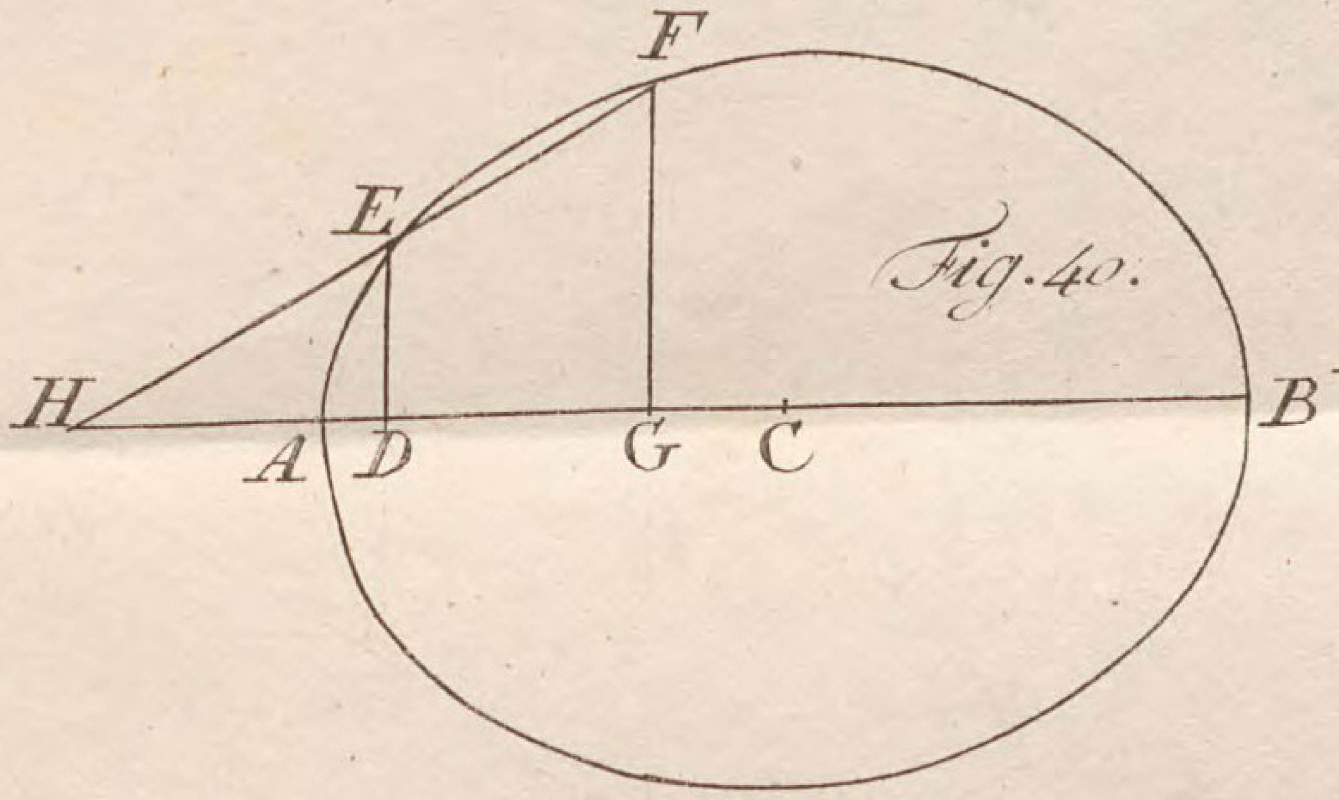


Fig. 40.

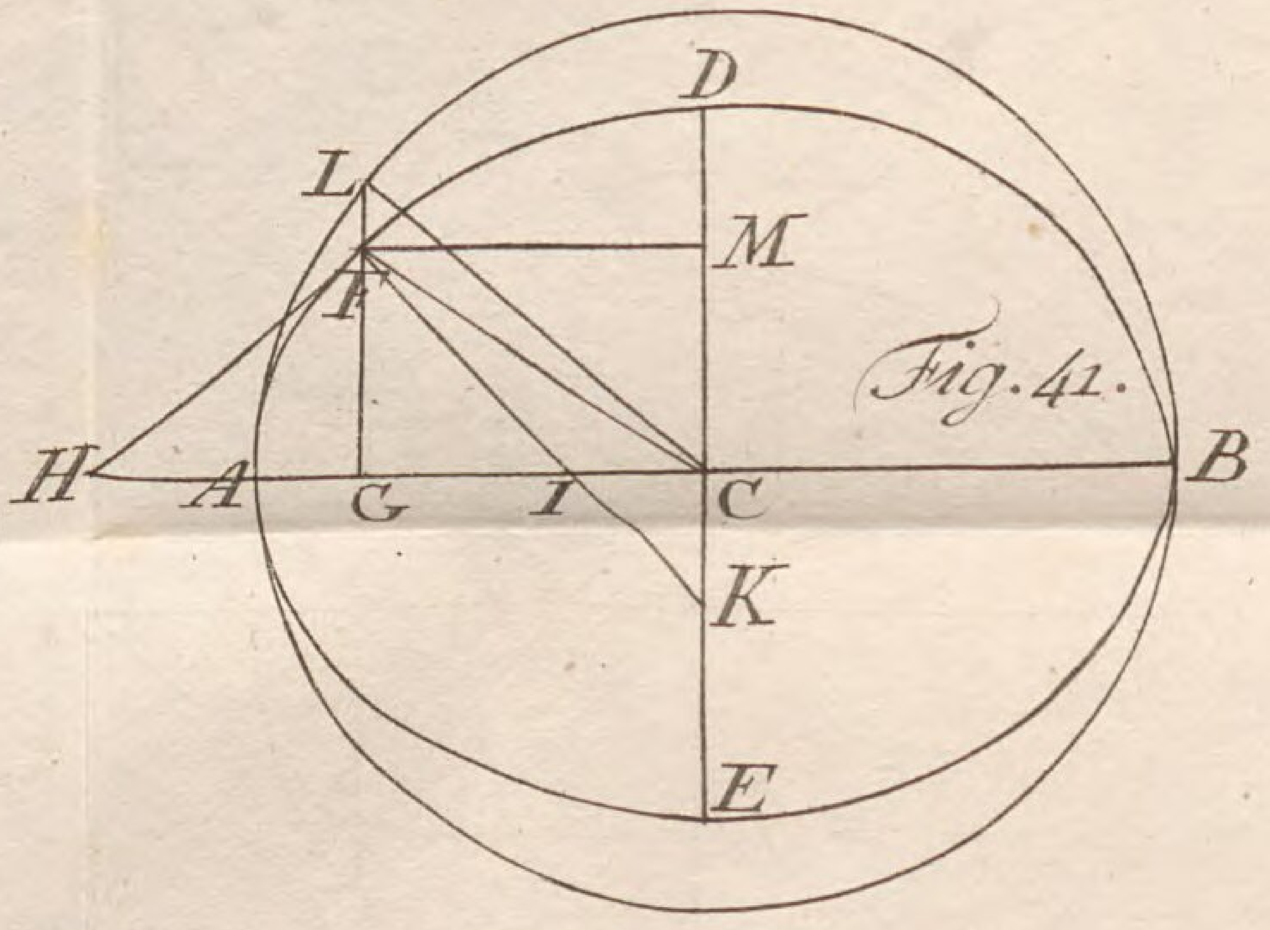


Fig. 41.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.B. Tab. V.

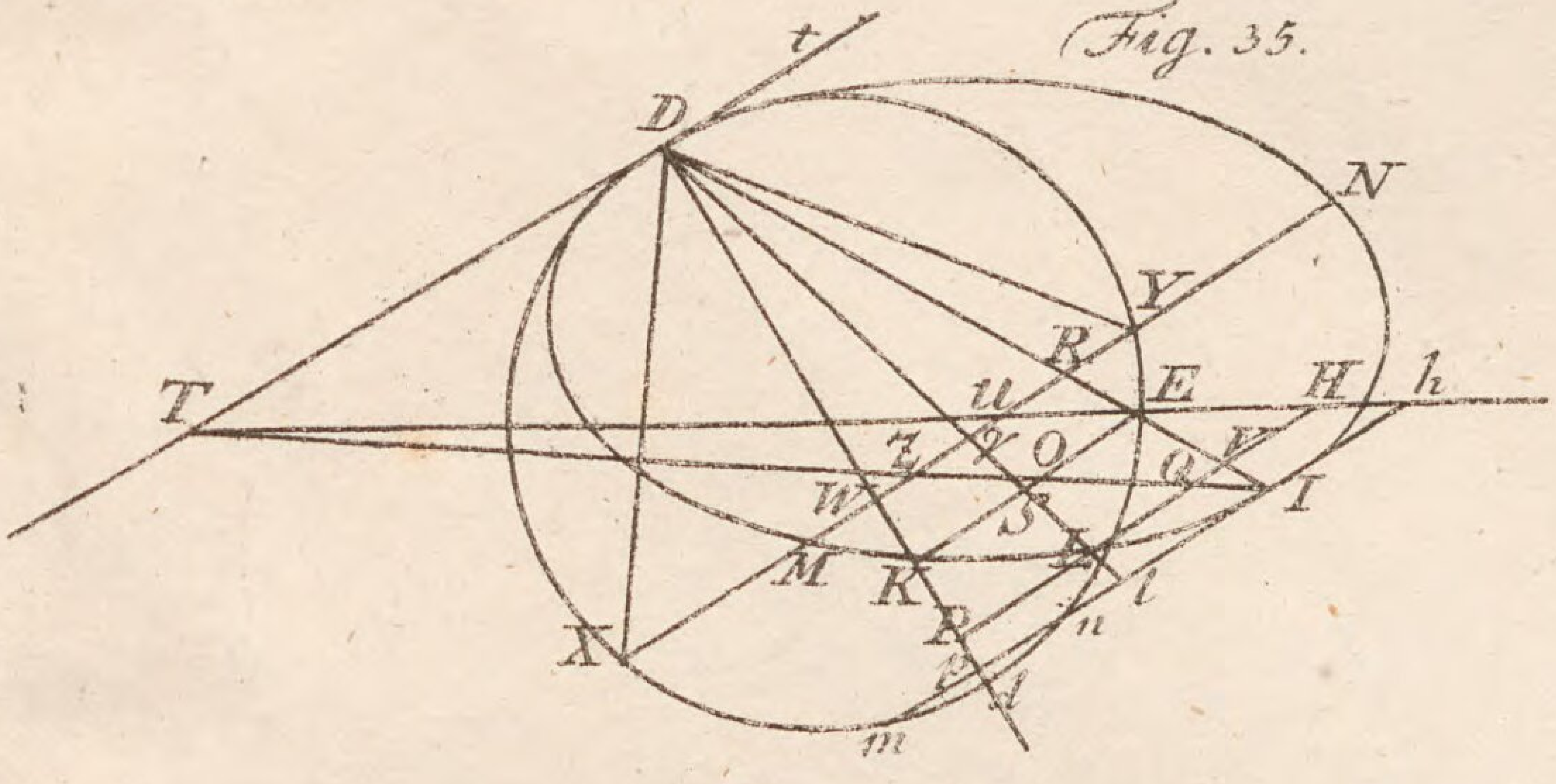


Fig. 35.

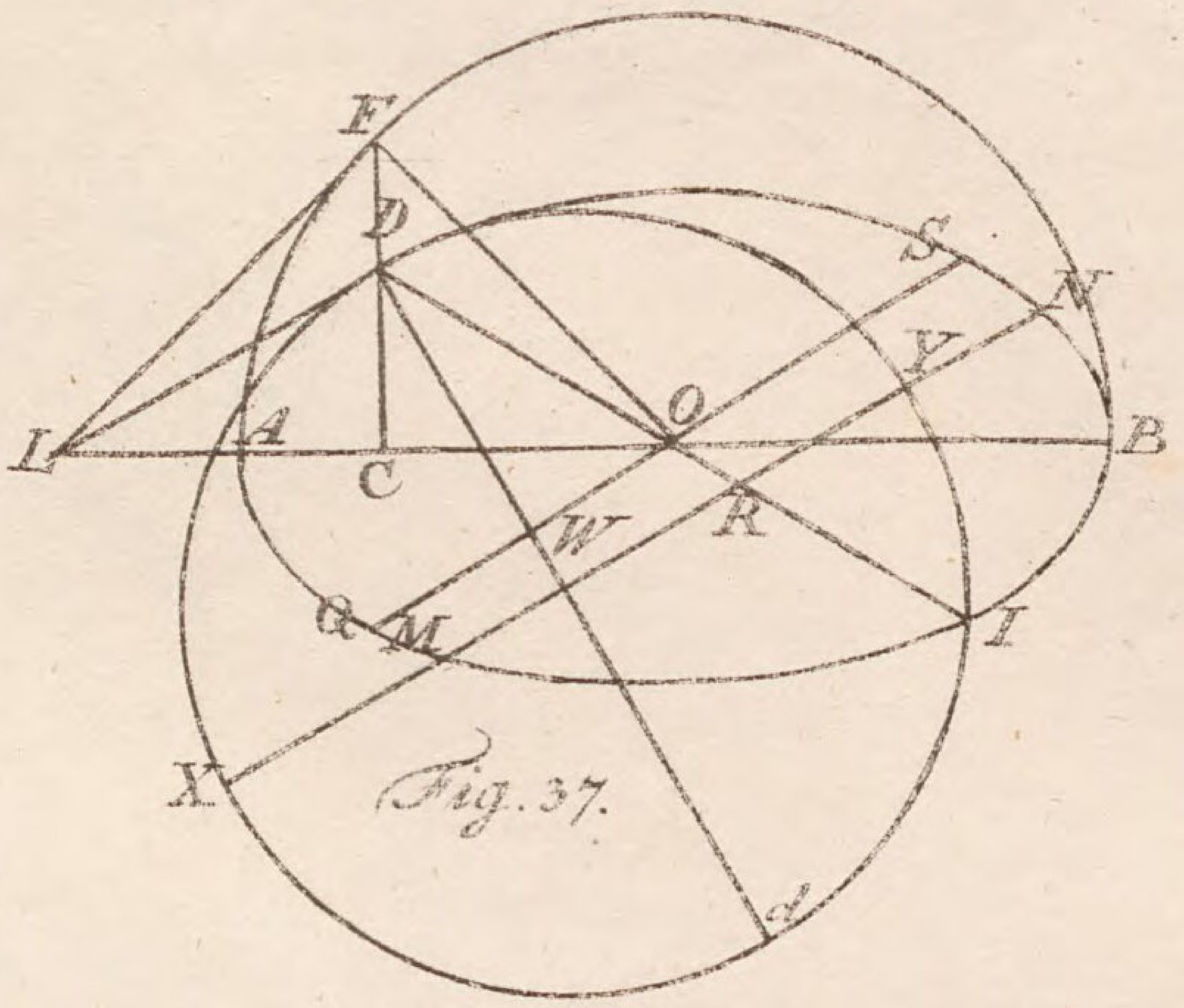


Fig. 37.

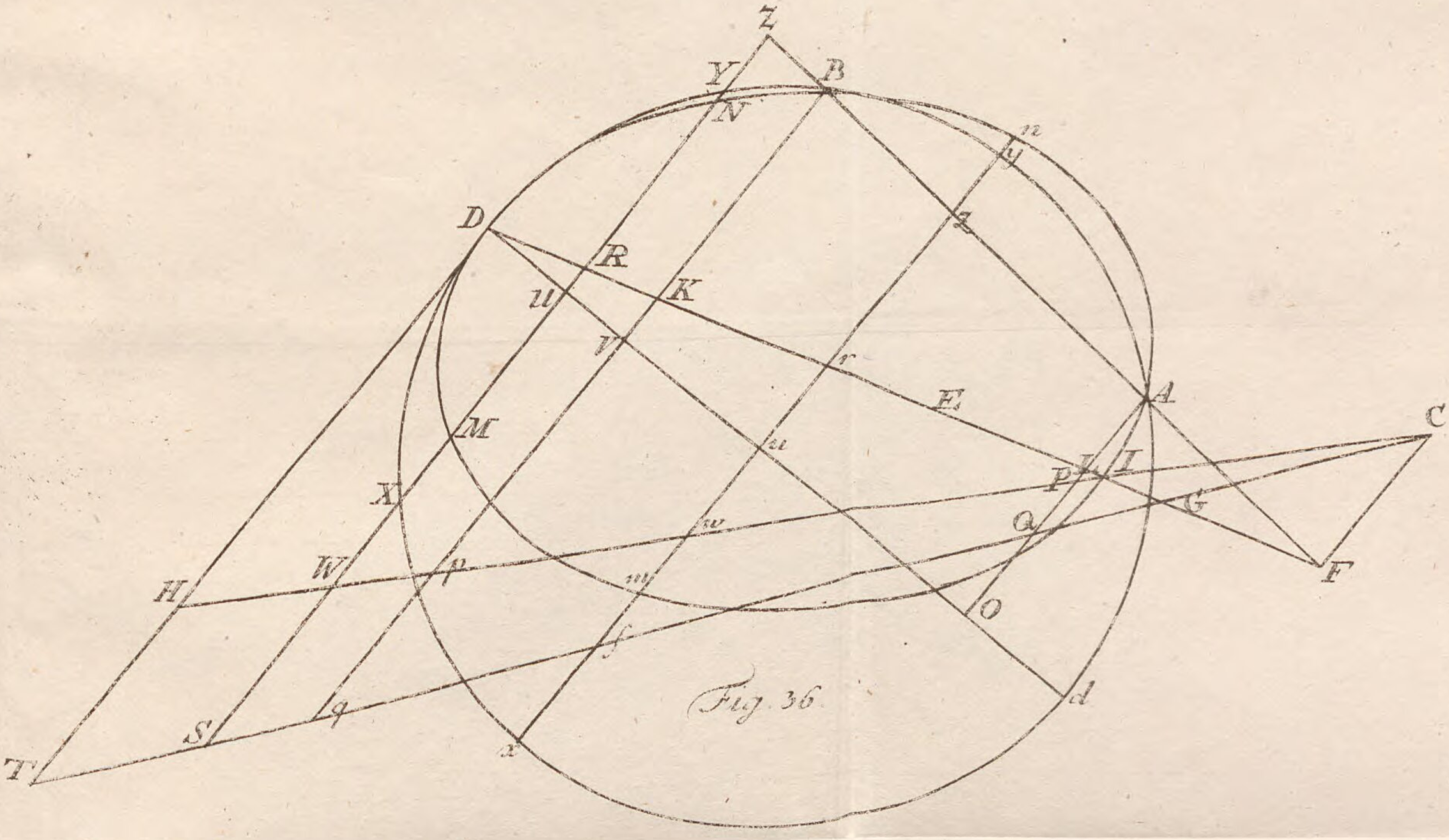


Fig. 36.

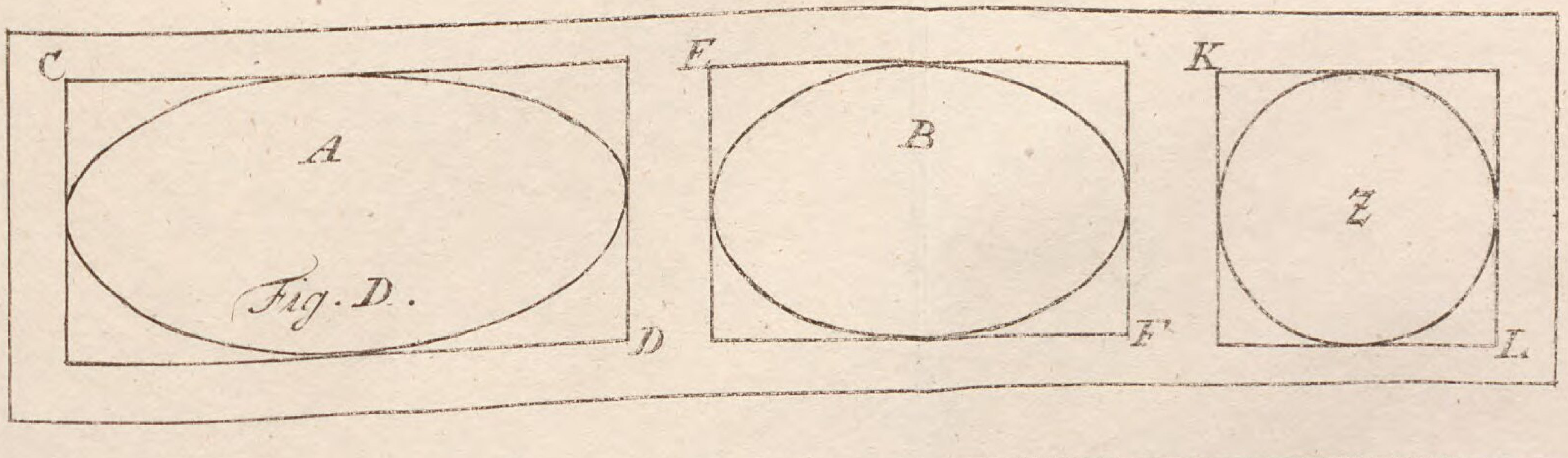


Fig. D.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.B. Tab. VI.

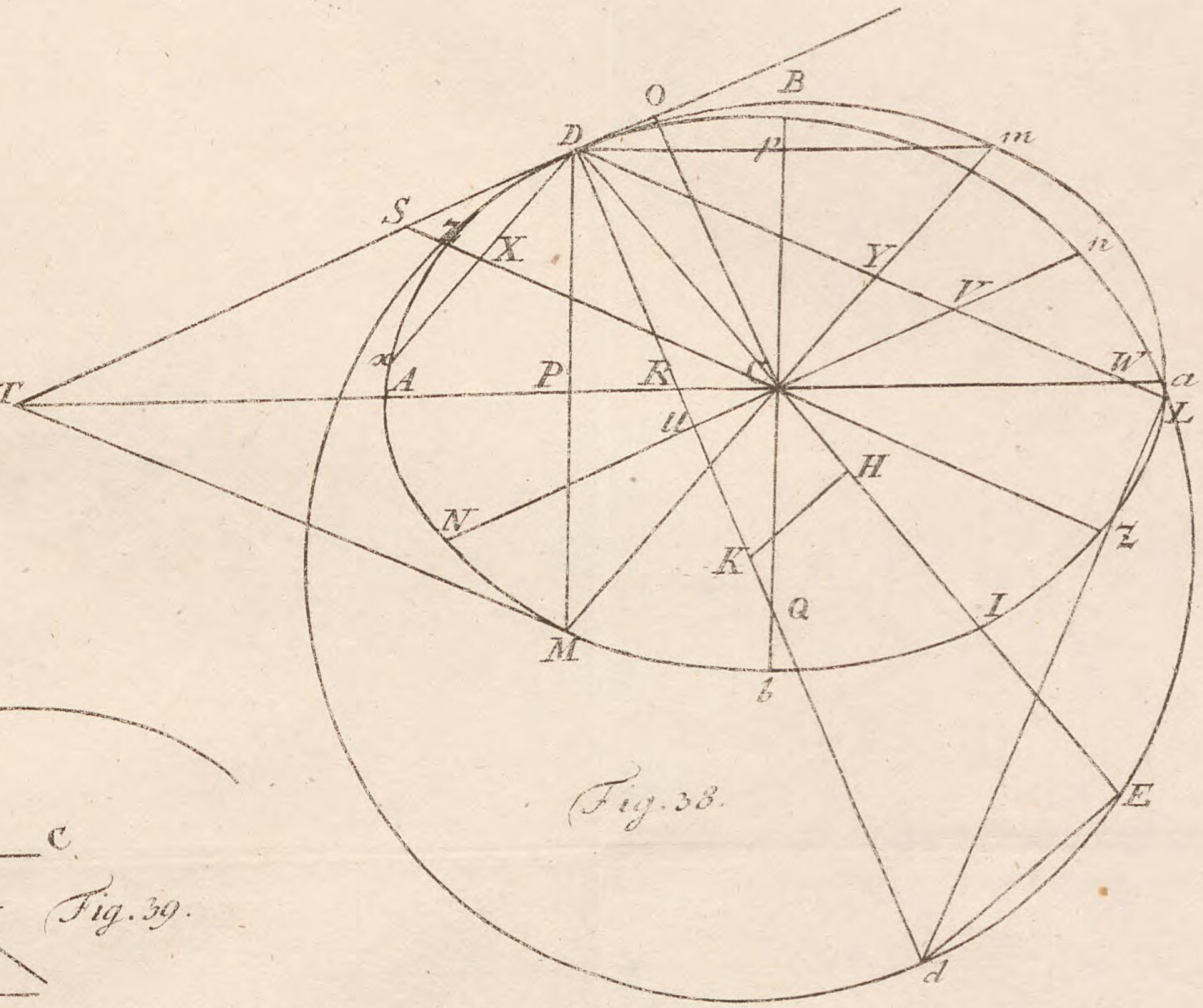


Fig. 38.

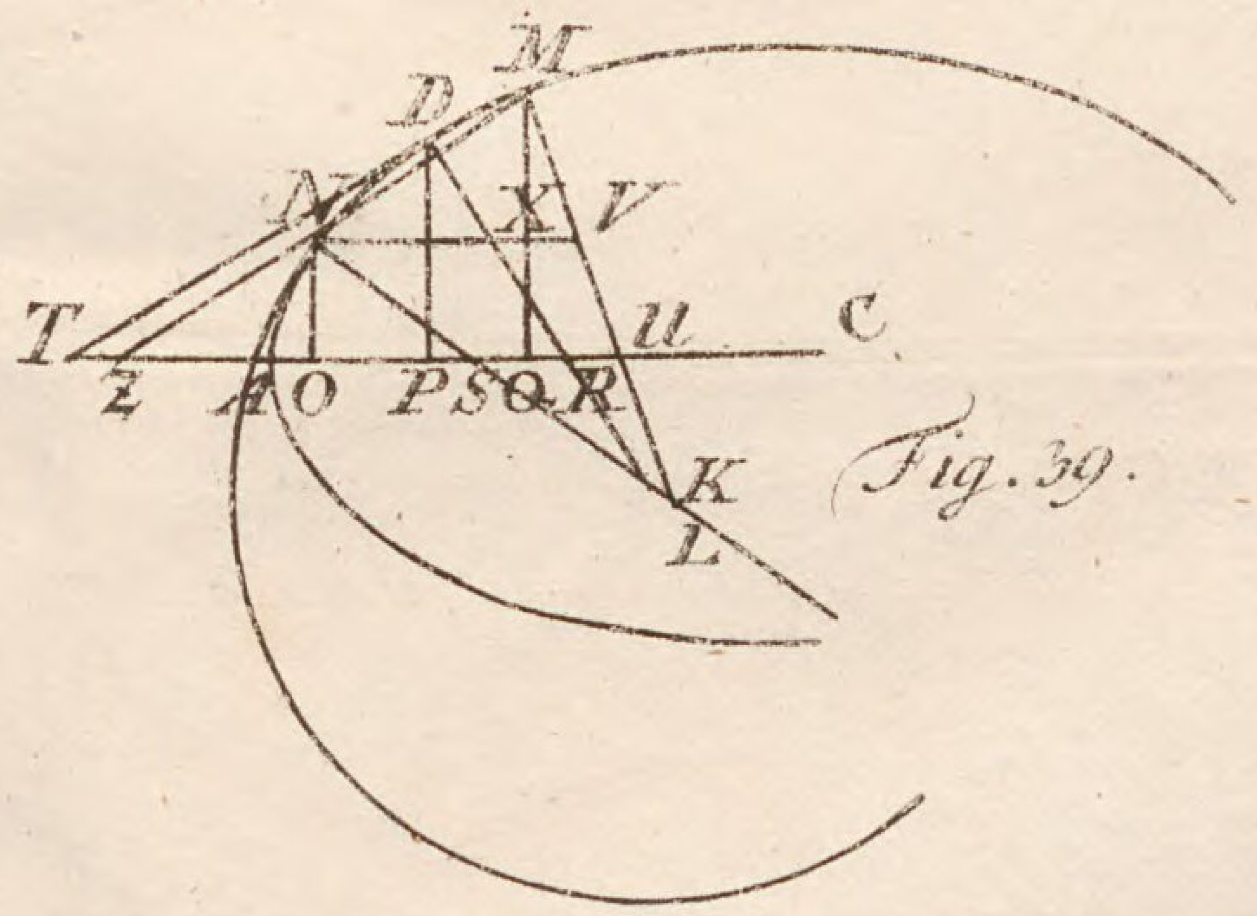


Fig. 39.

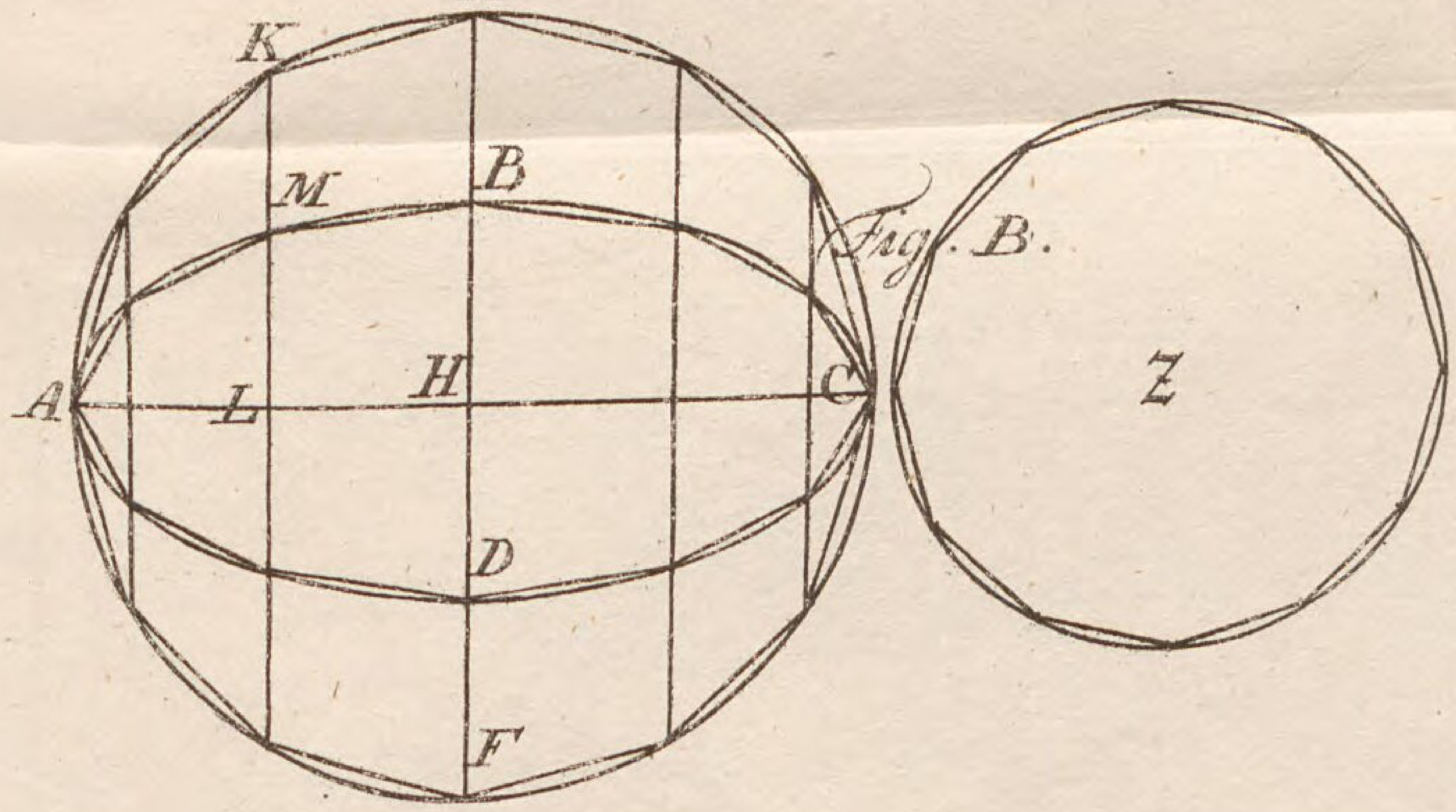


Fig. B.

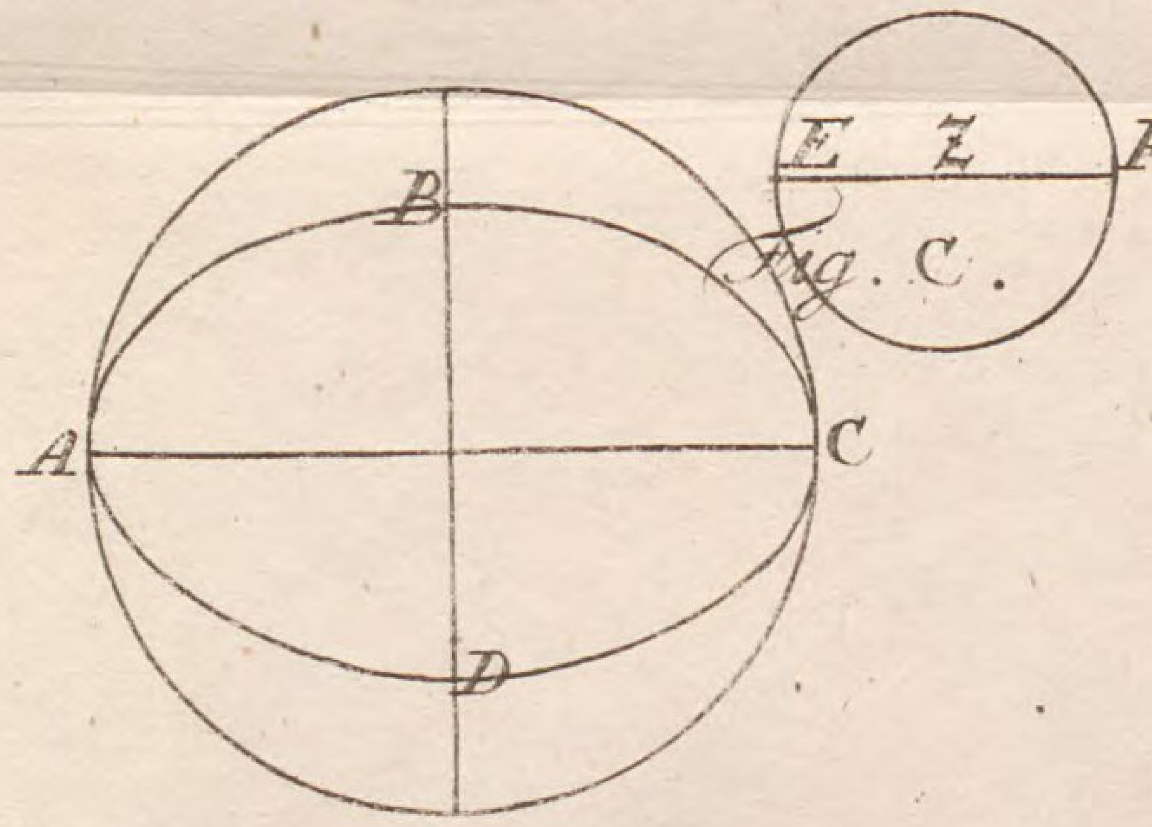
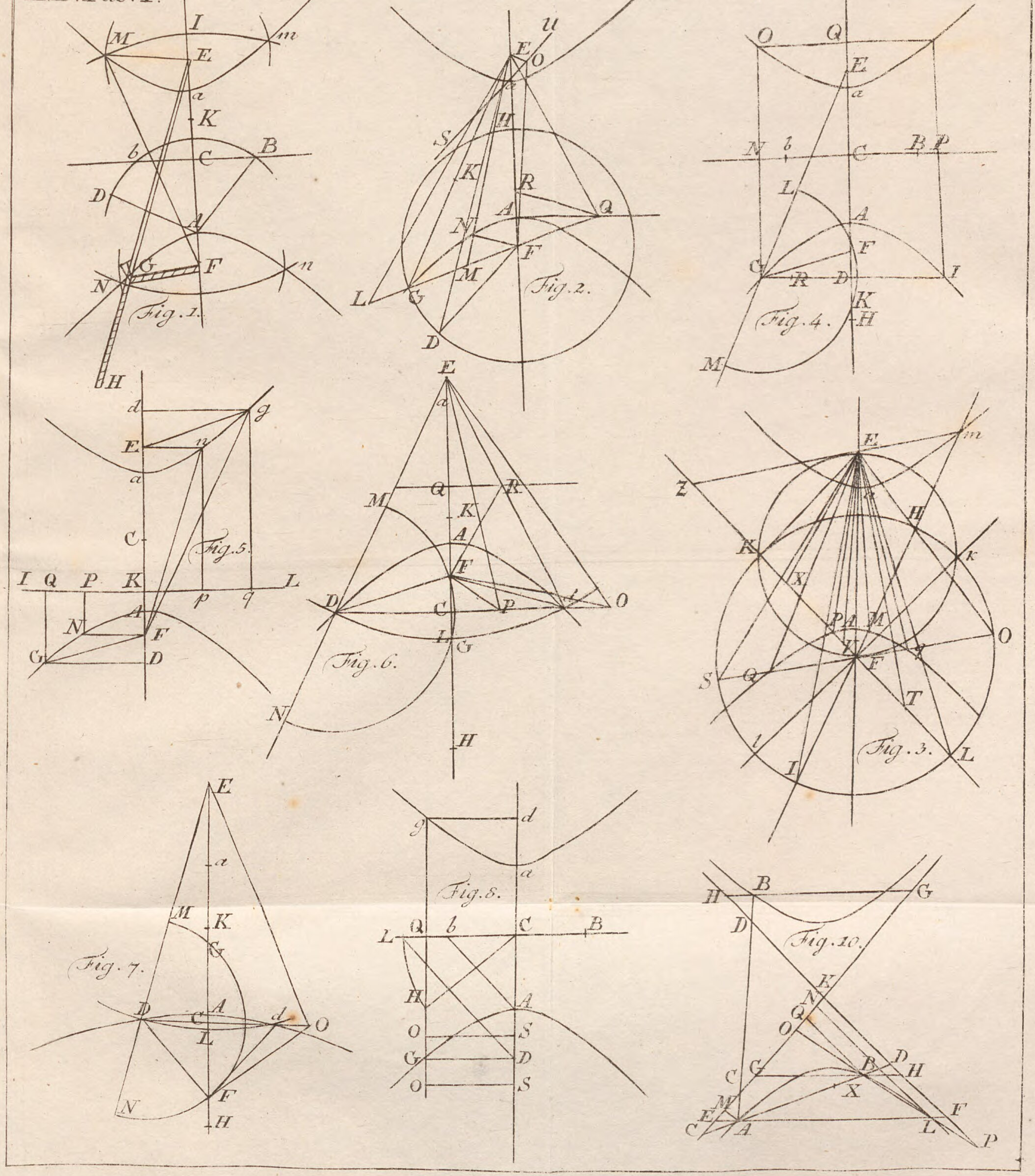


Fig. C.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

III.B. Tab. I.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

III. B. Tab. II.

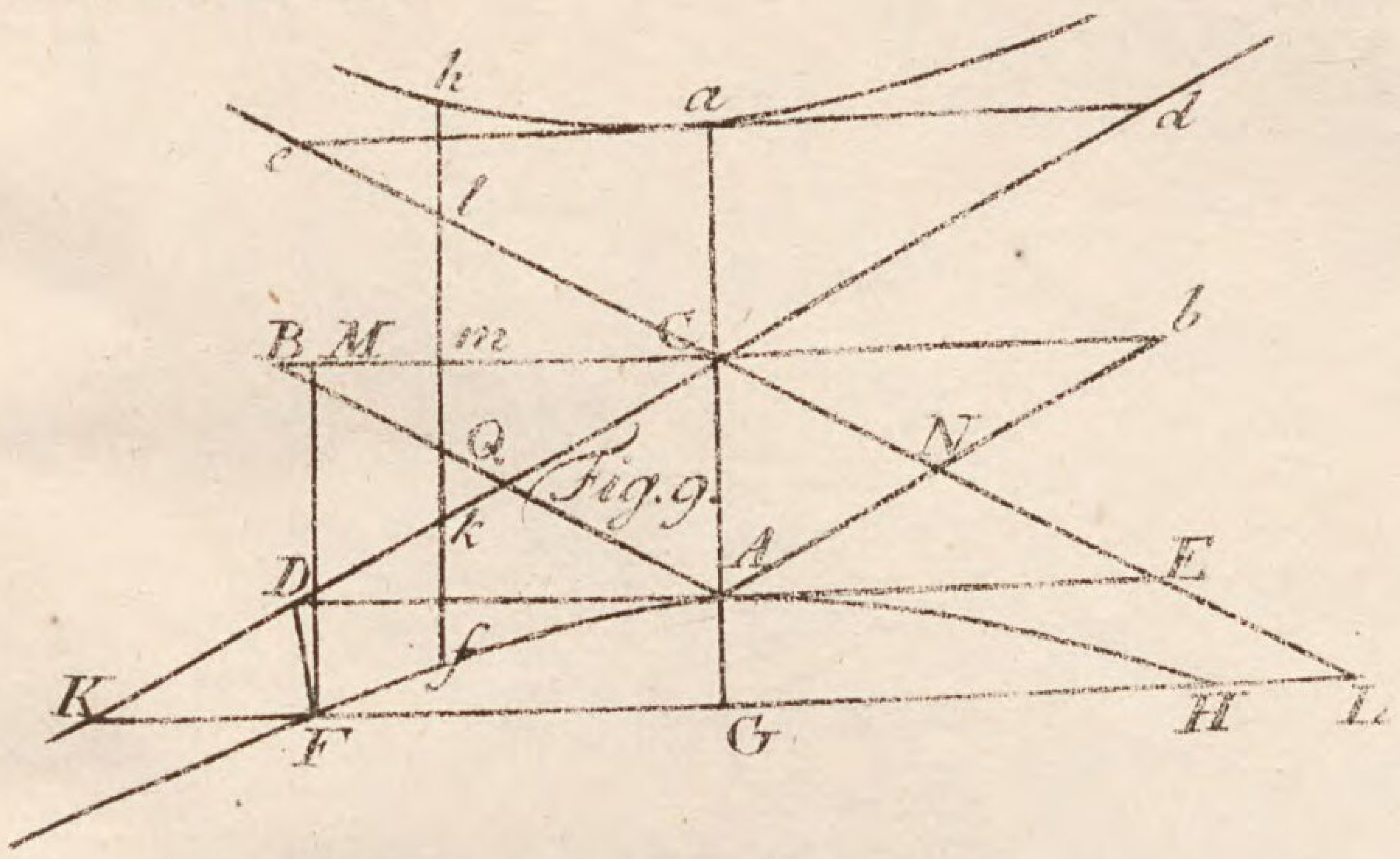


Fig. 9.

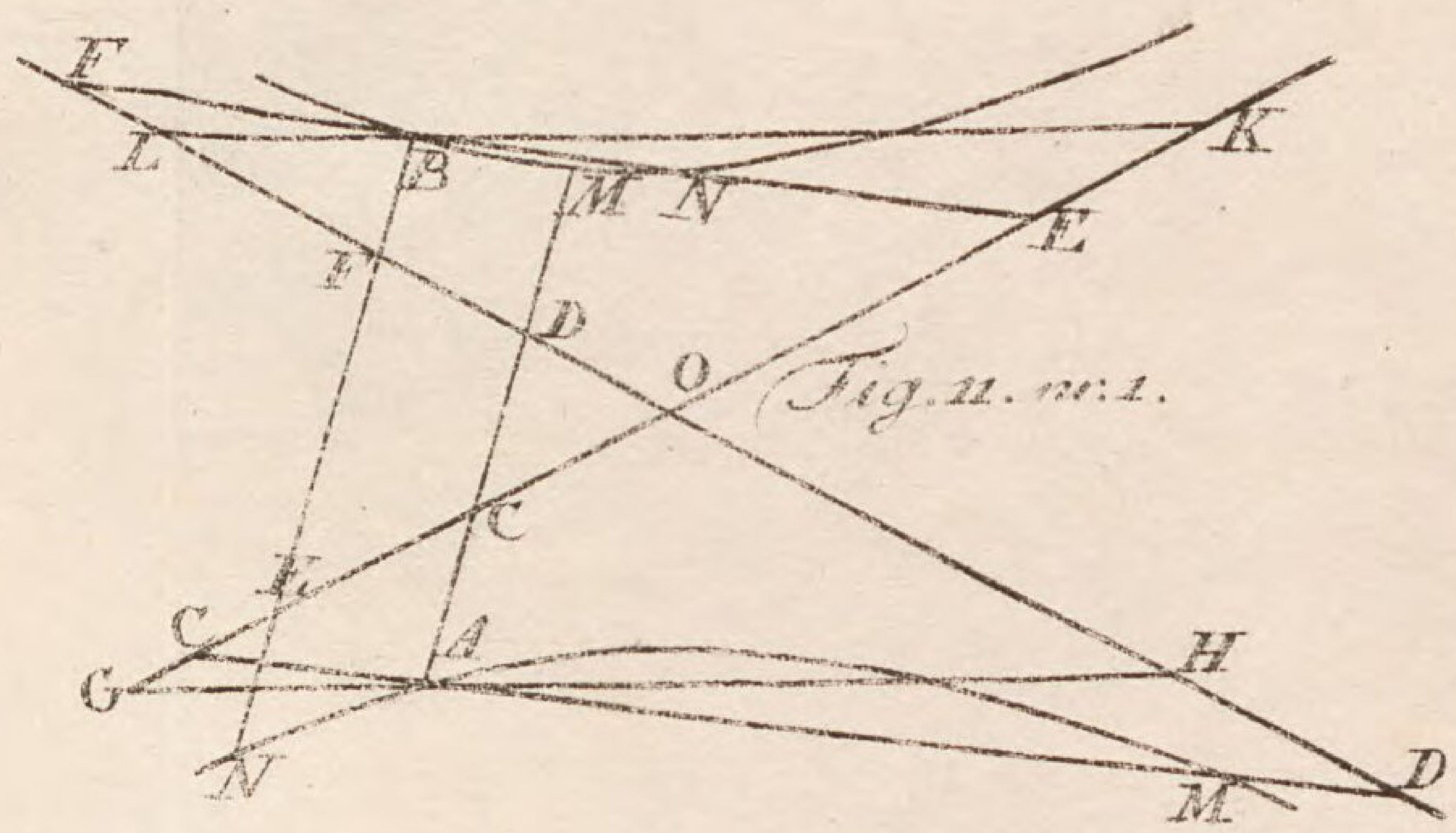


Fig. 11. nr. 1.

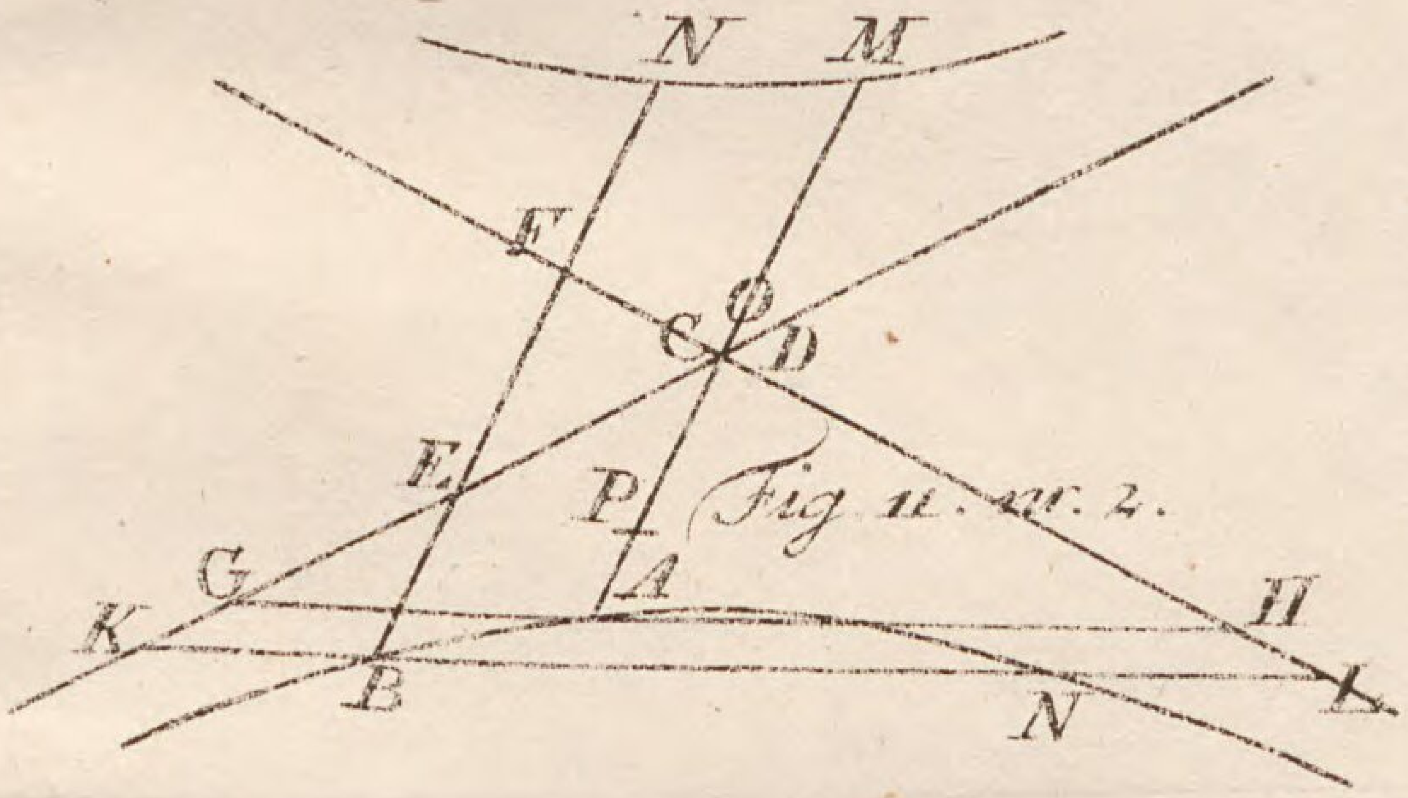


Fig. 11. nr. 2.

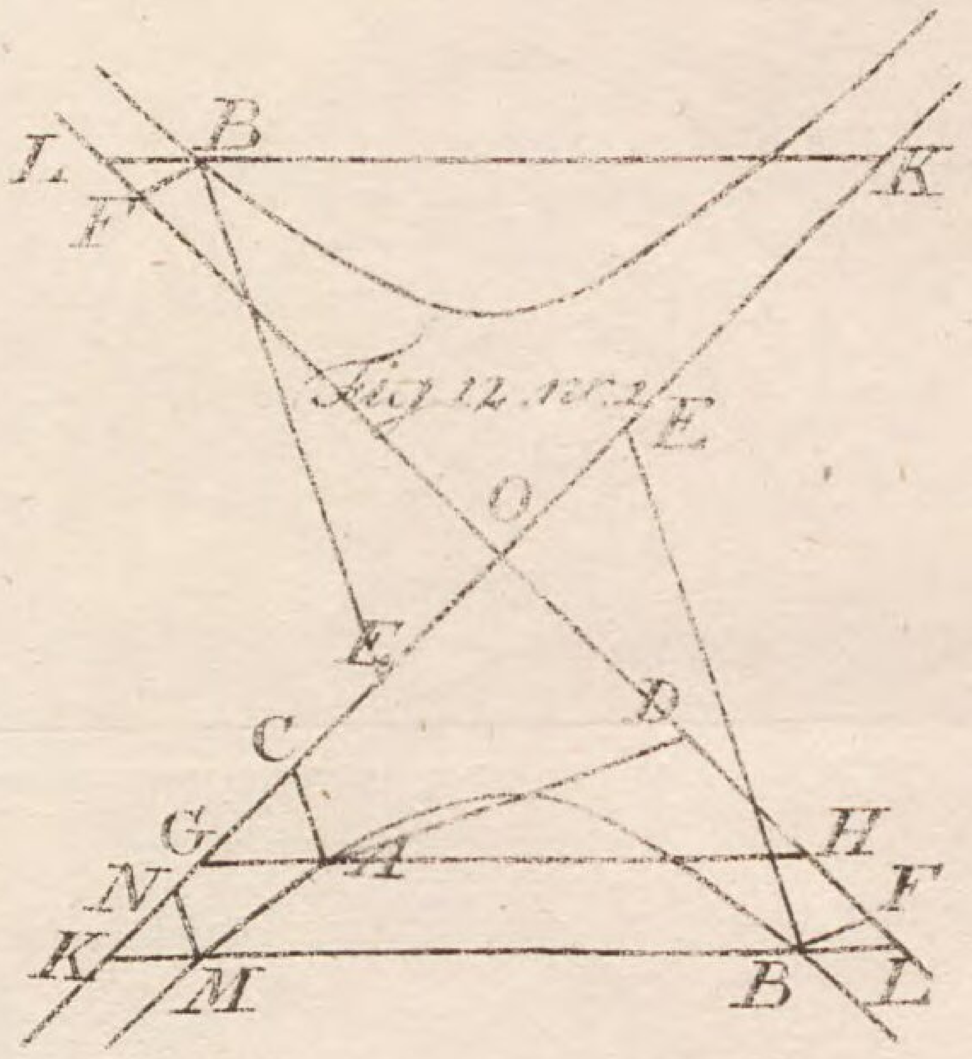


Fig. 12. nr. 1.

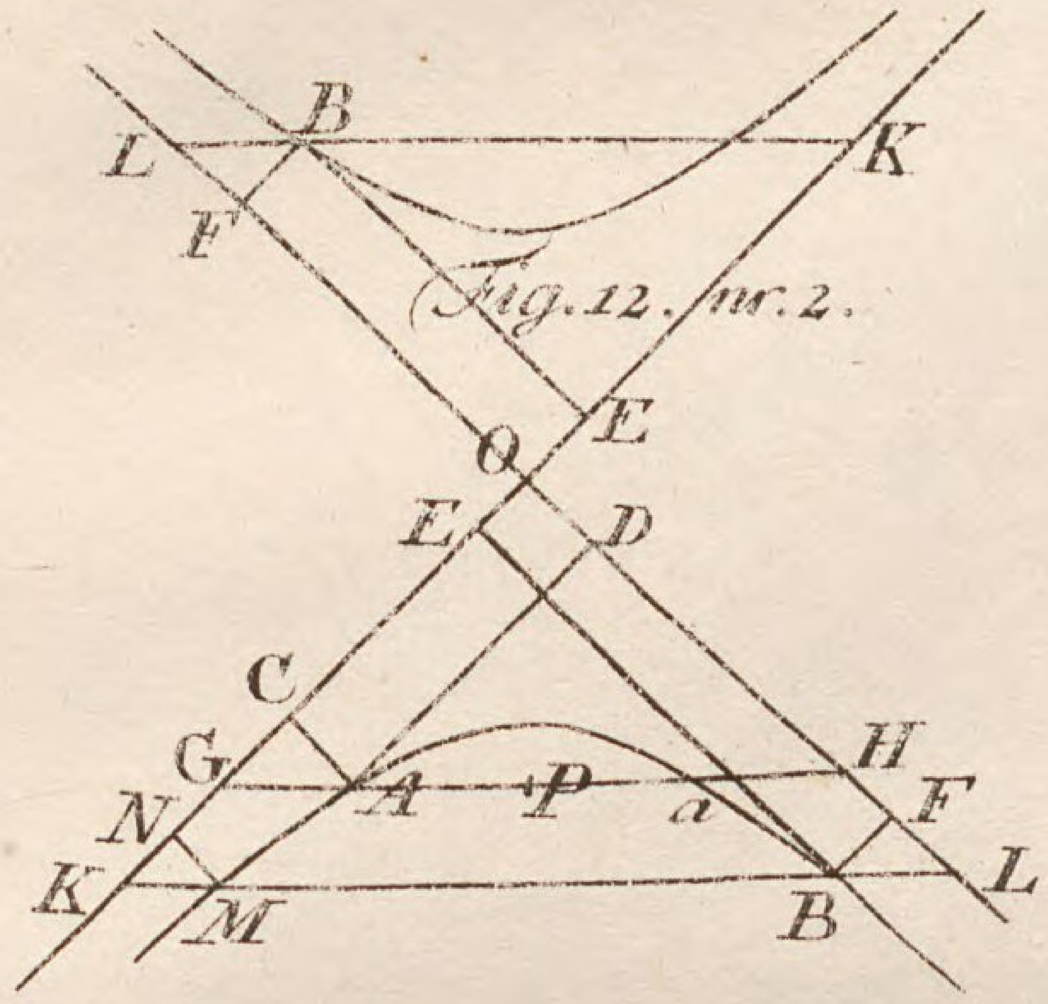


Fig. 12. nr. 2.

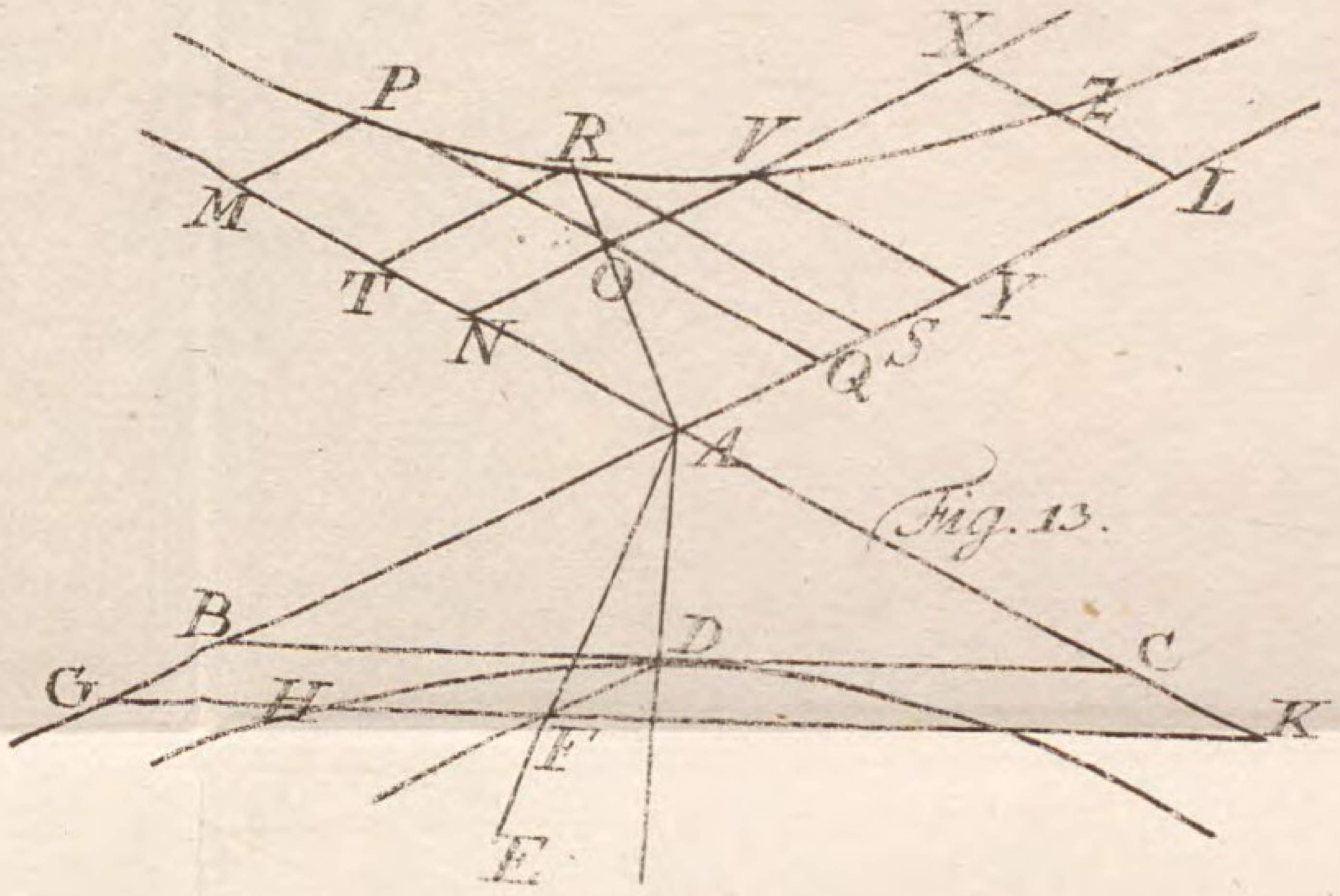


Fig. 13.

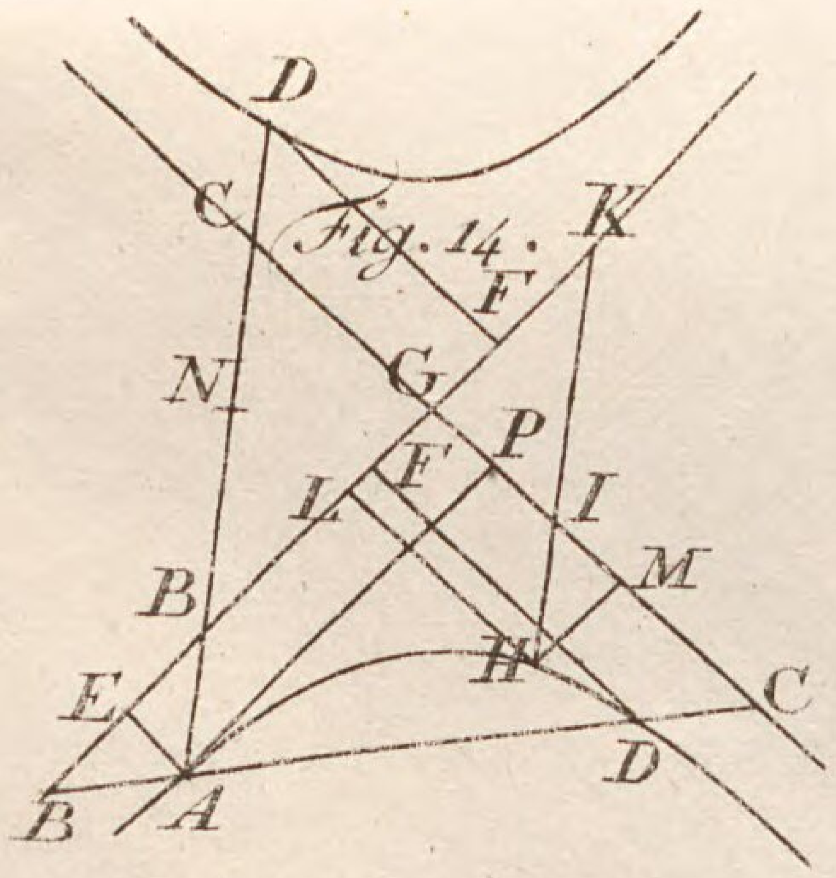


Fig. 14.

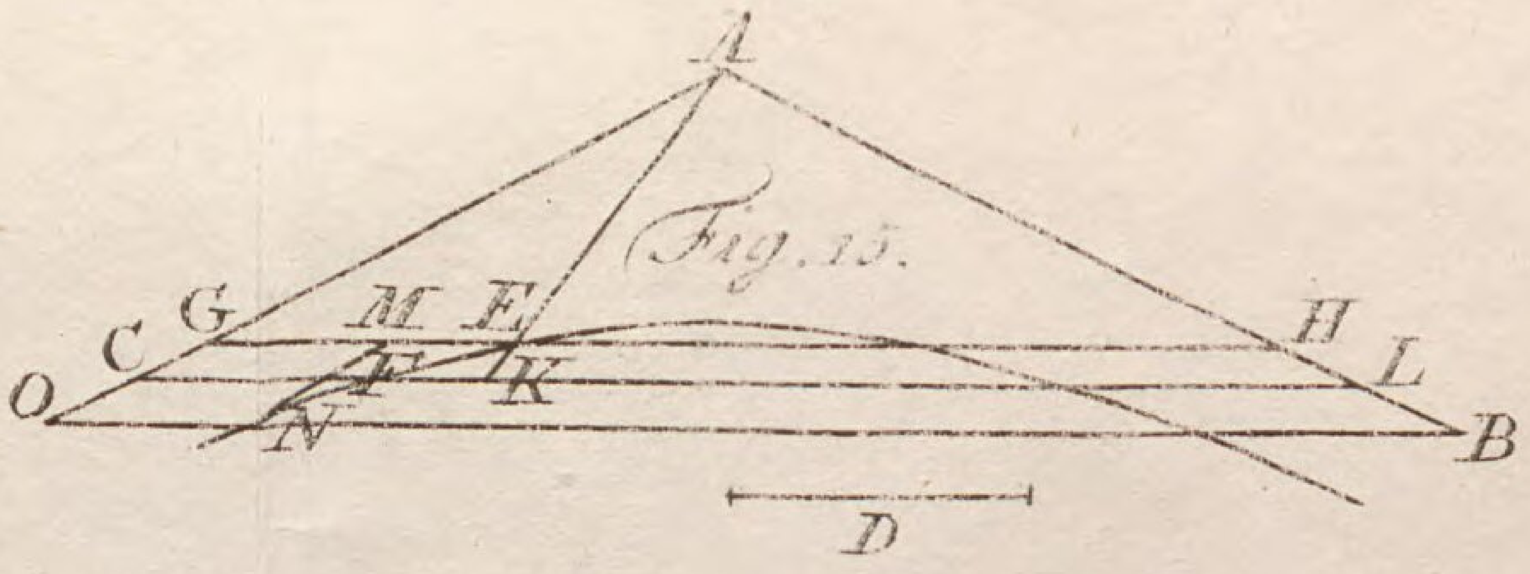


Fig. 15.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.B. Tab. I.

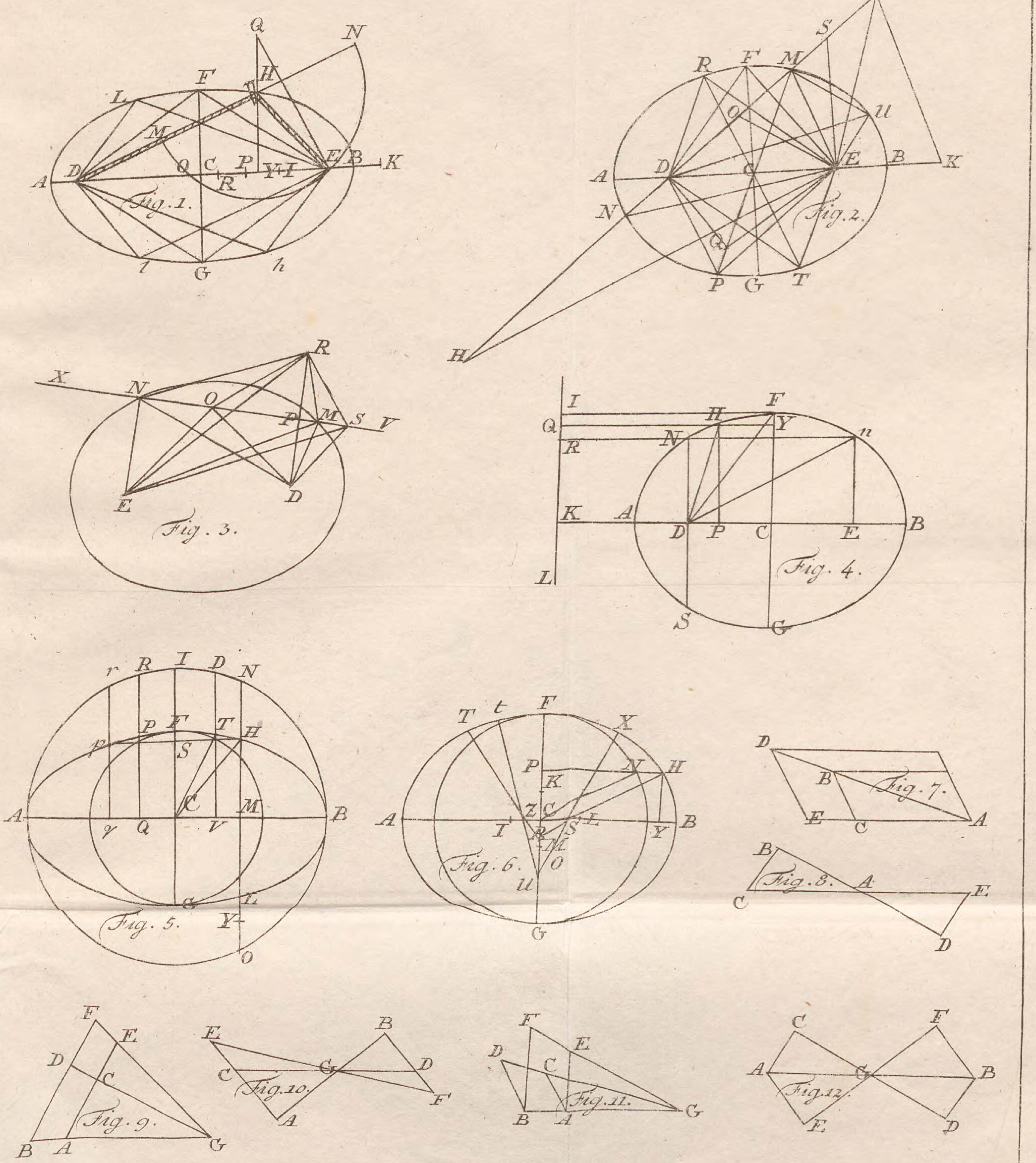


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.B. Tab. II.

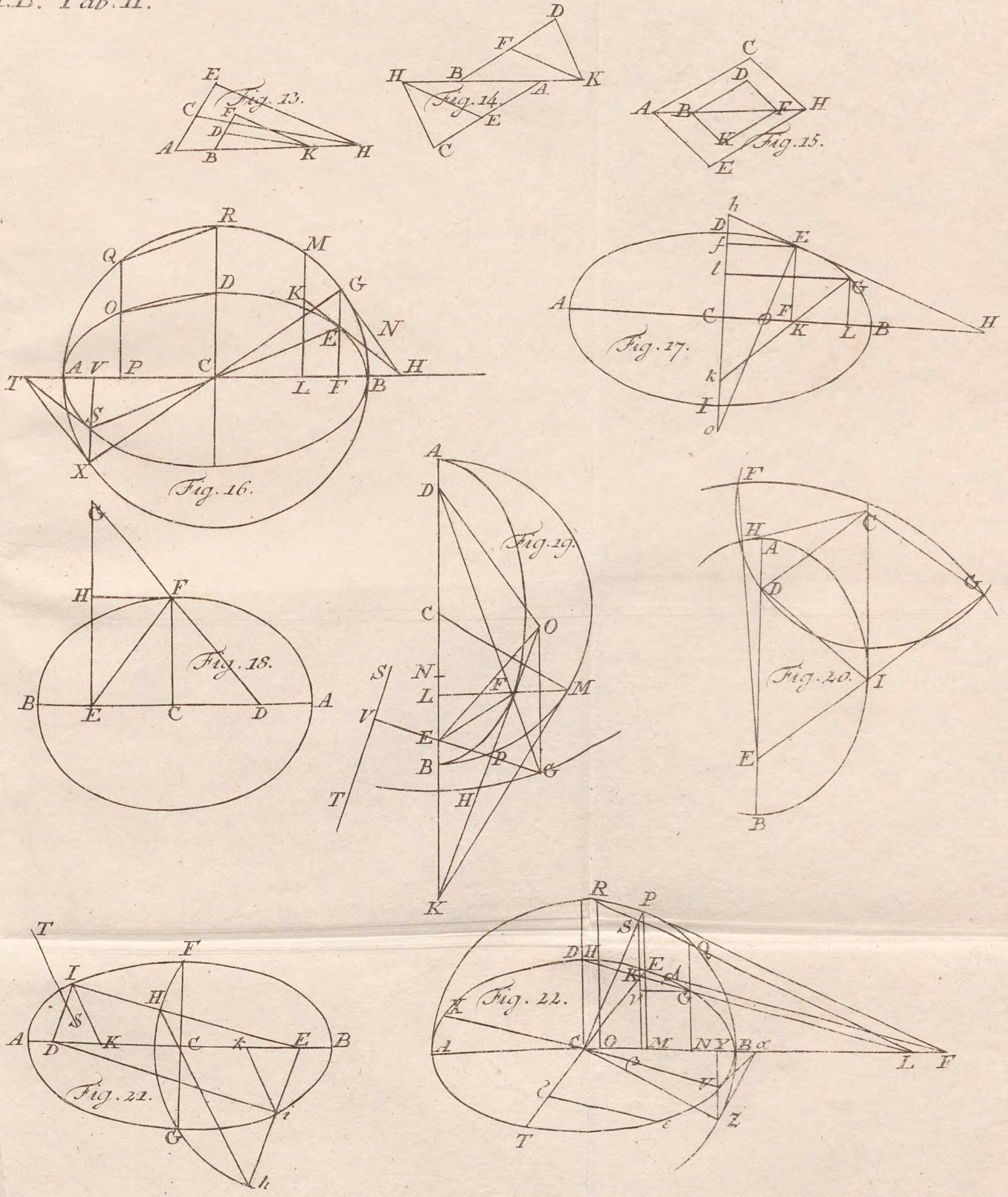


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

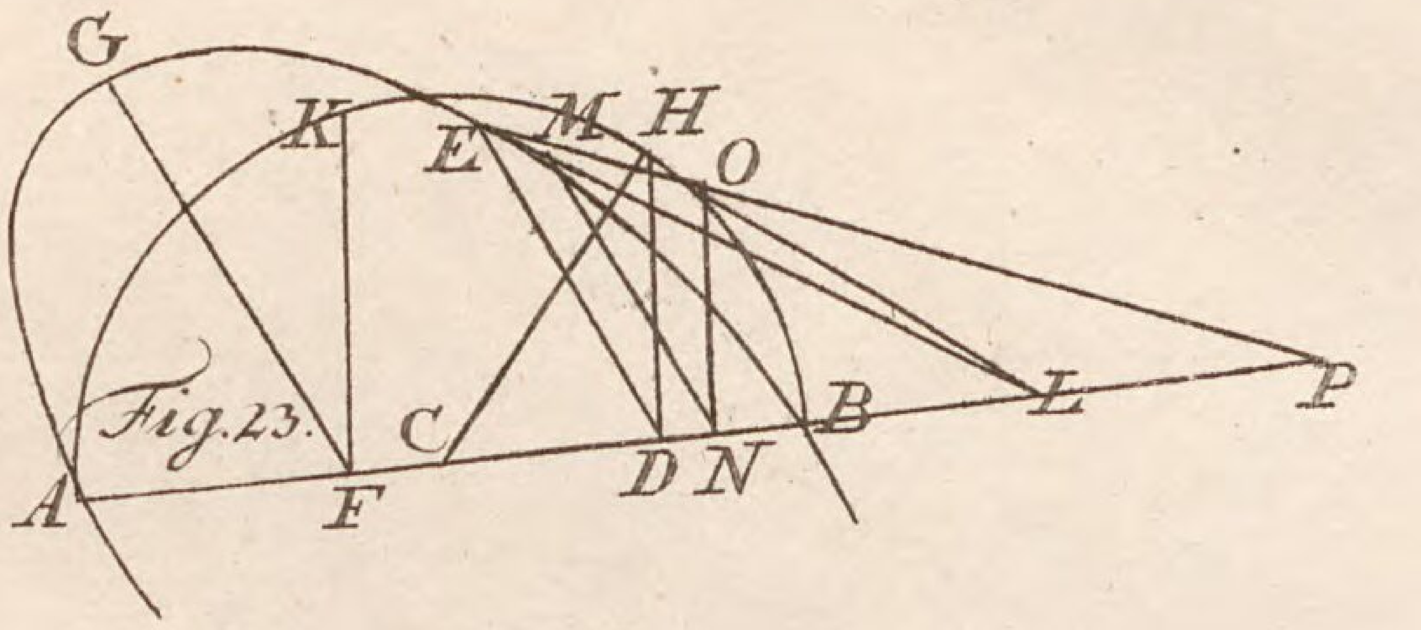


Fig. 23.

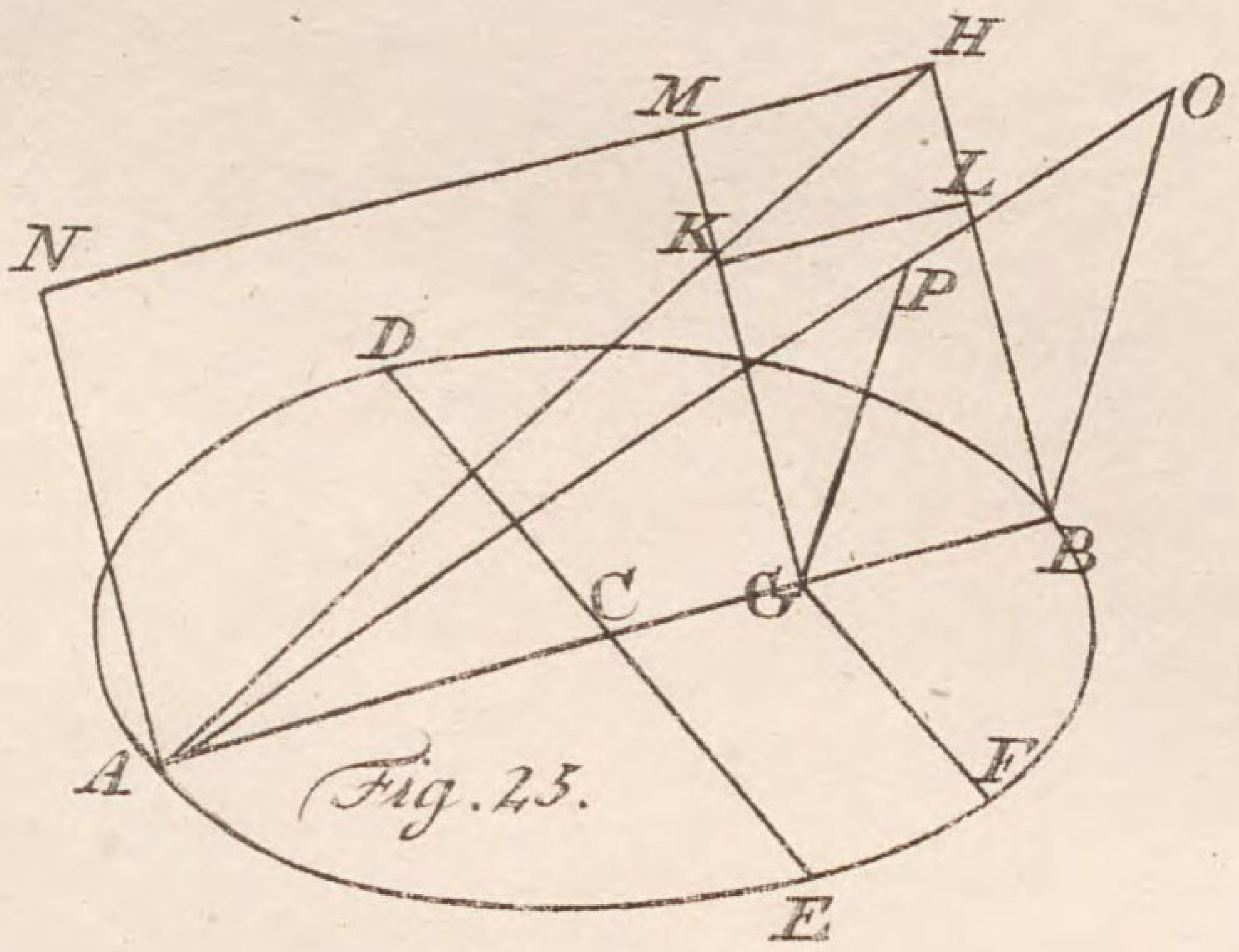


Fig. 25.

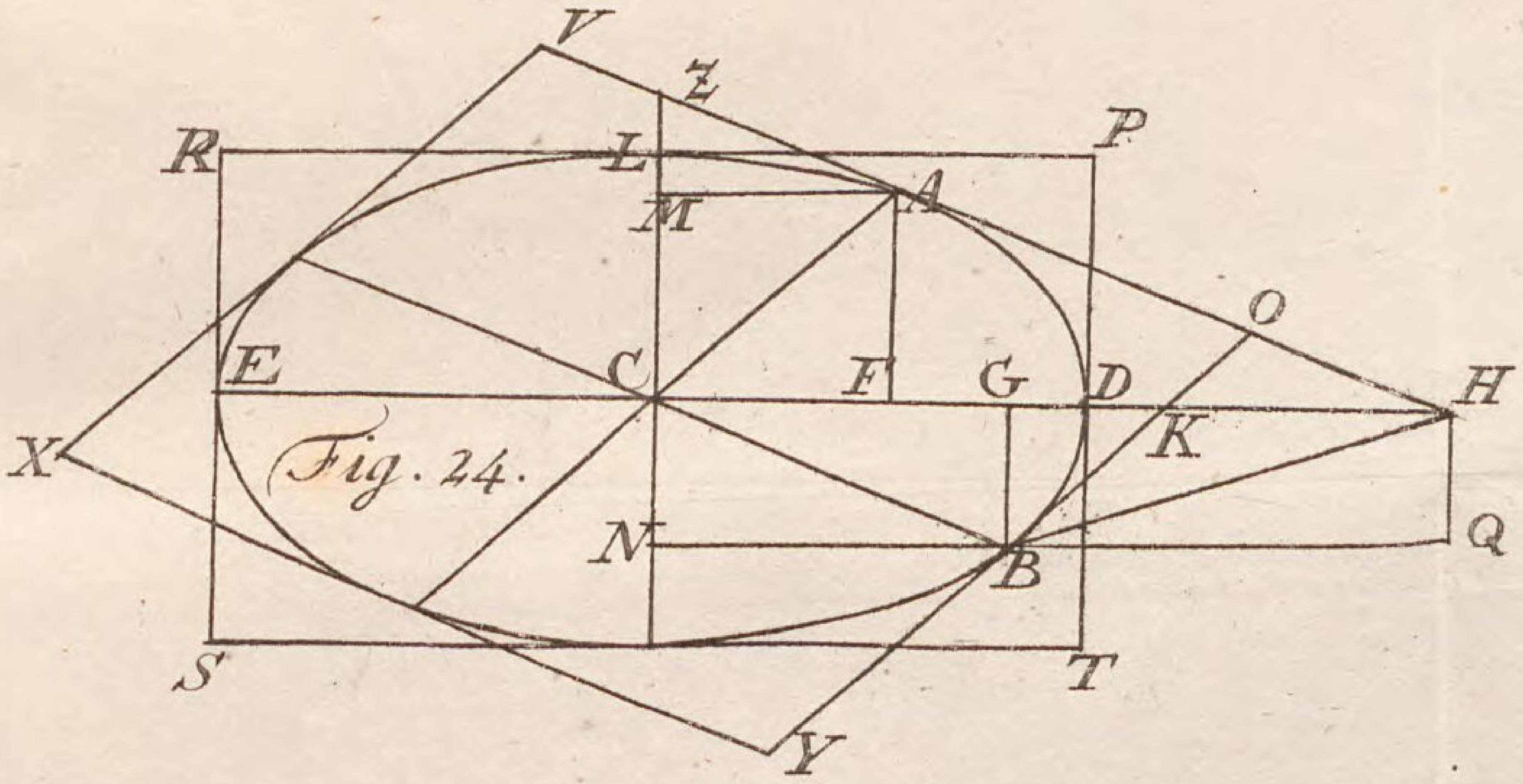


Fig. 24.

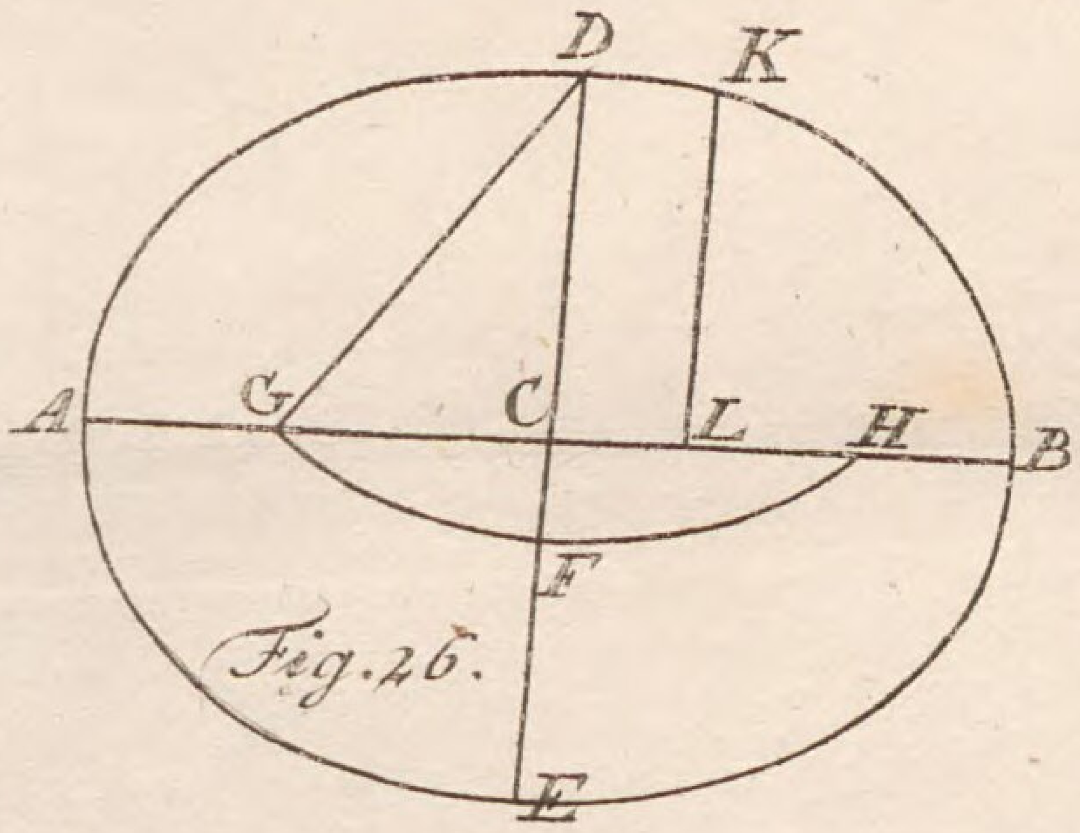


Fig. 26.

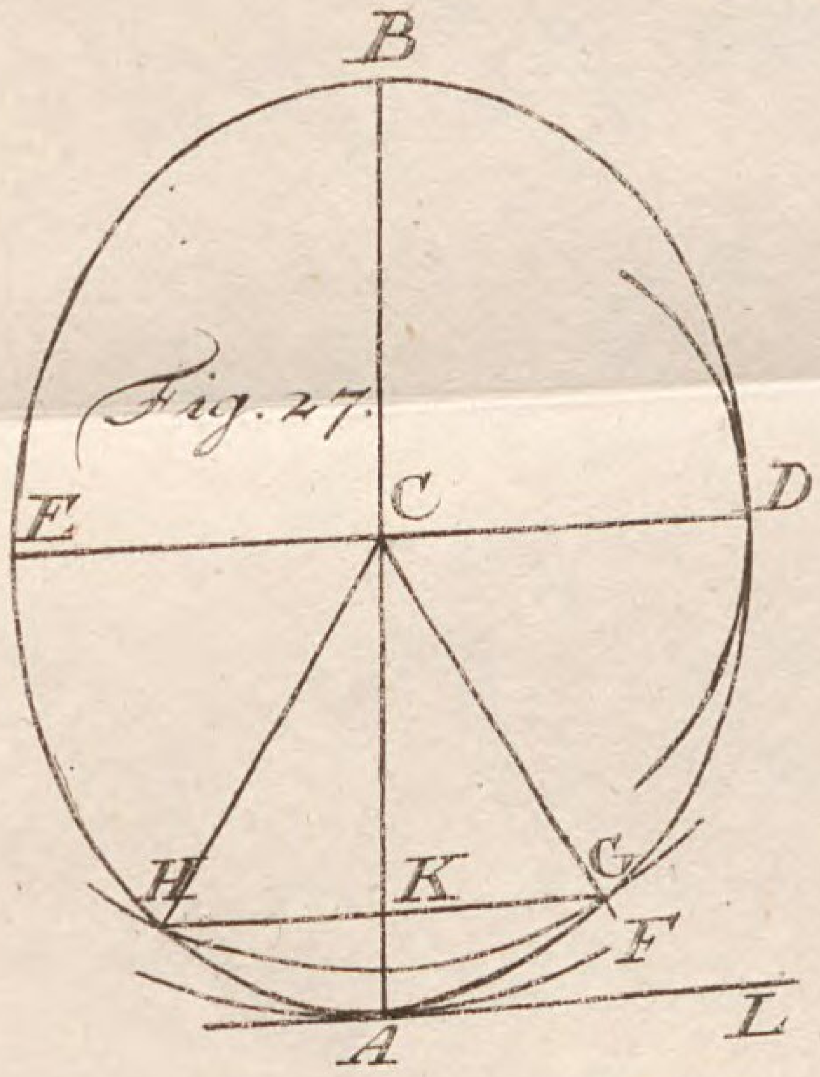


Fig. 27.

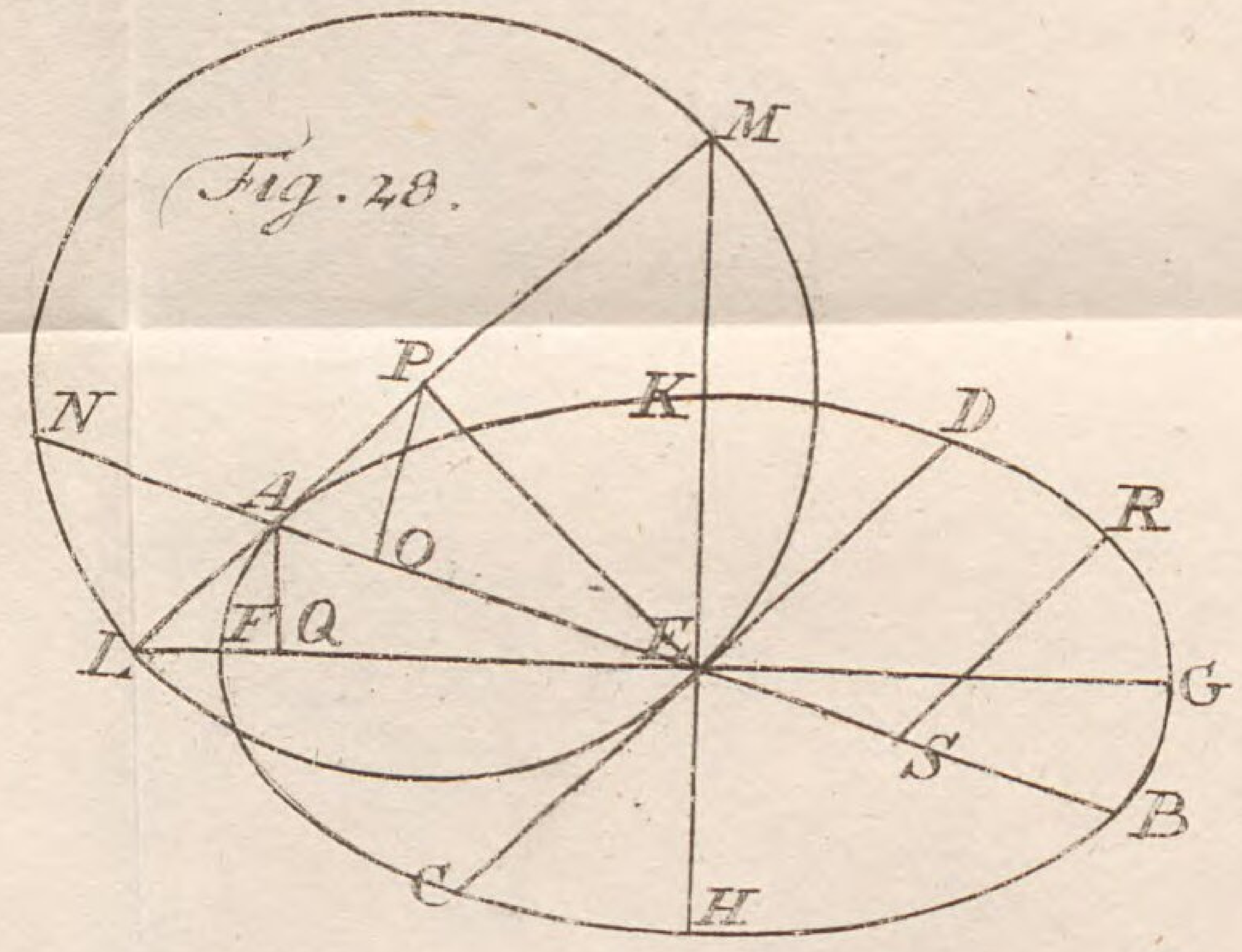
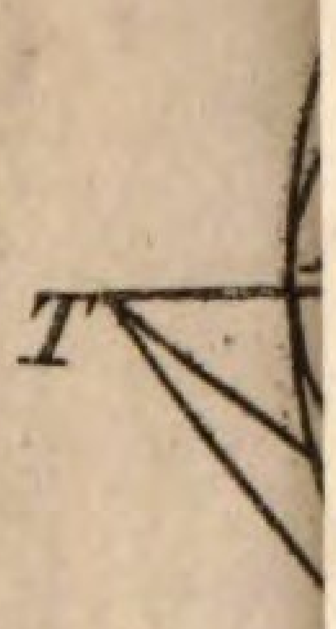


Fig. 28.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II.B. T



Bayerische
Staatsbibliothek
München

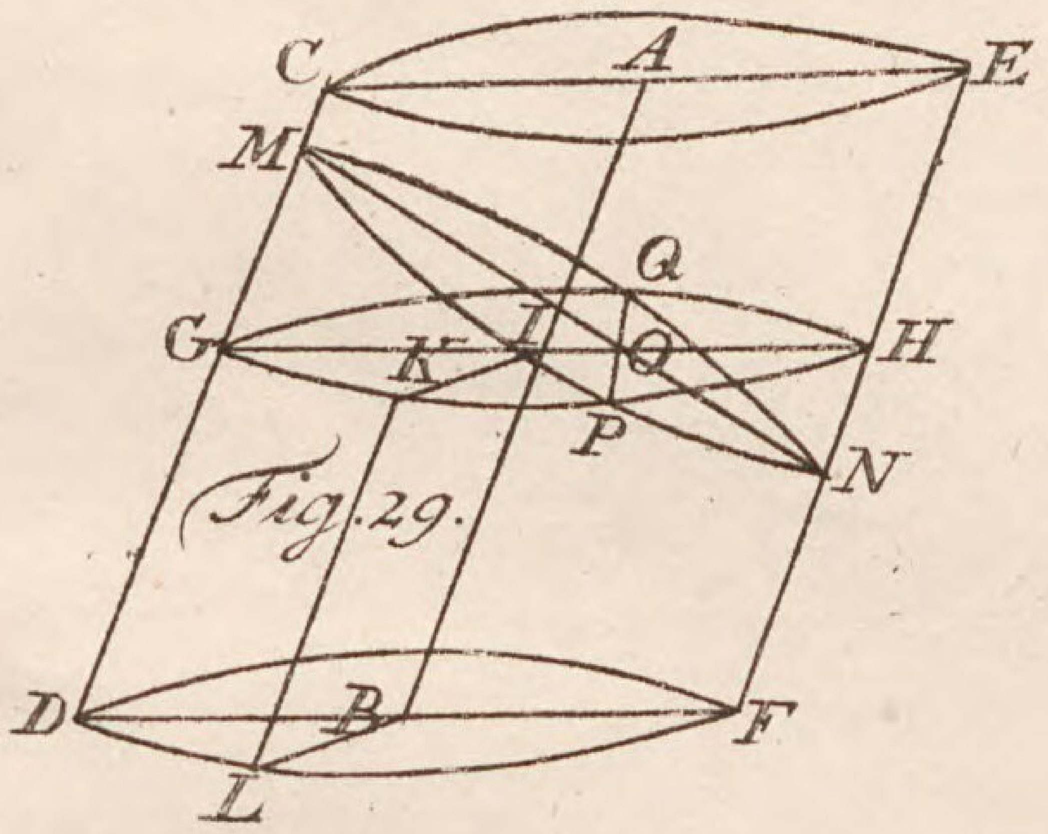


Fig. 29.

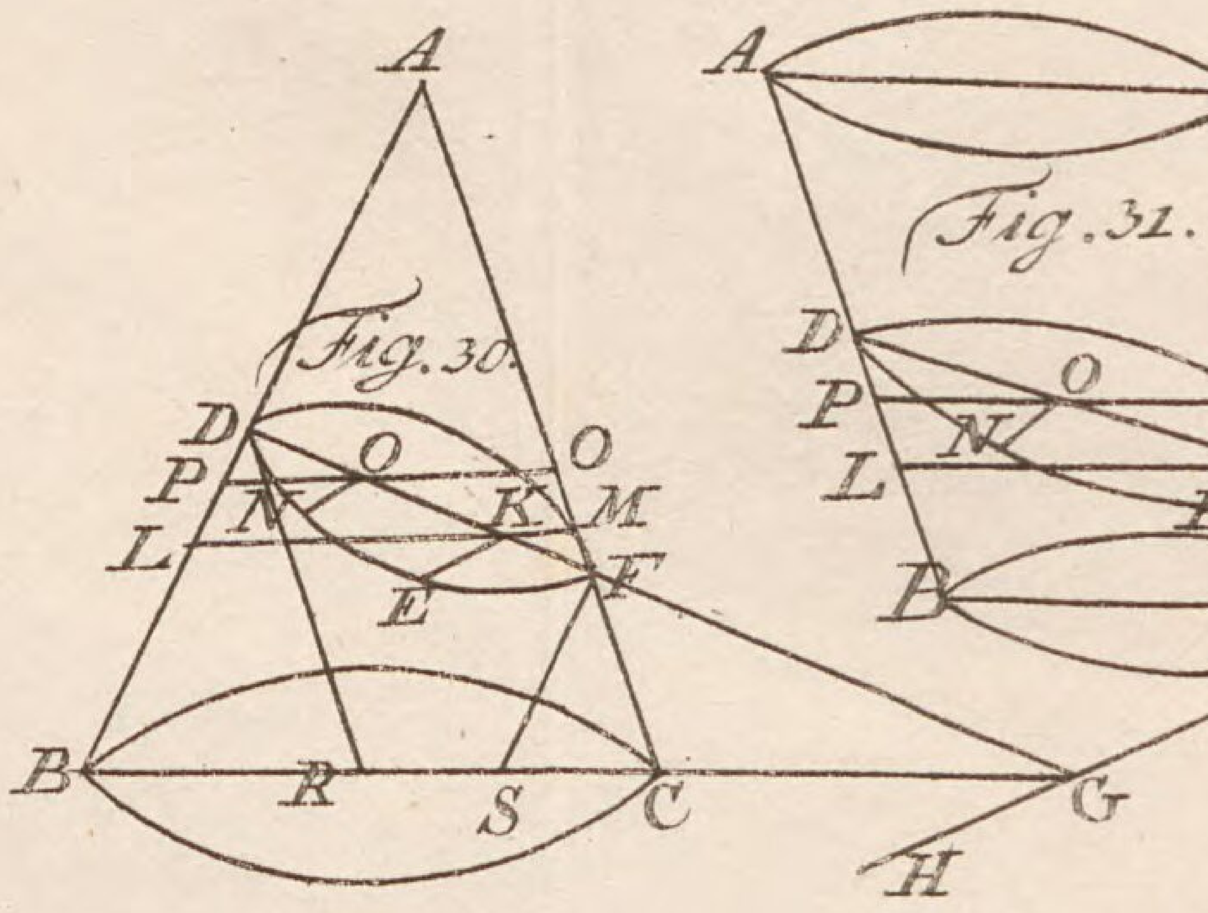


Fig. 30.

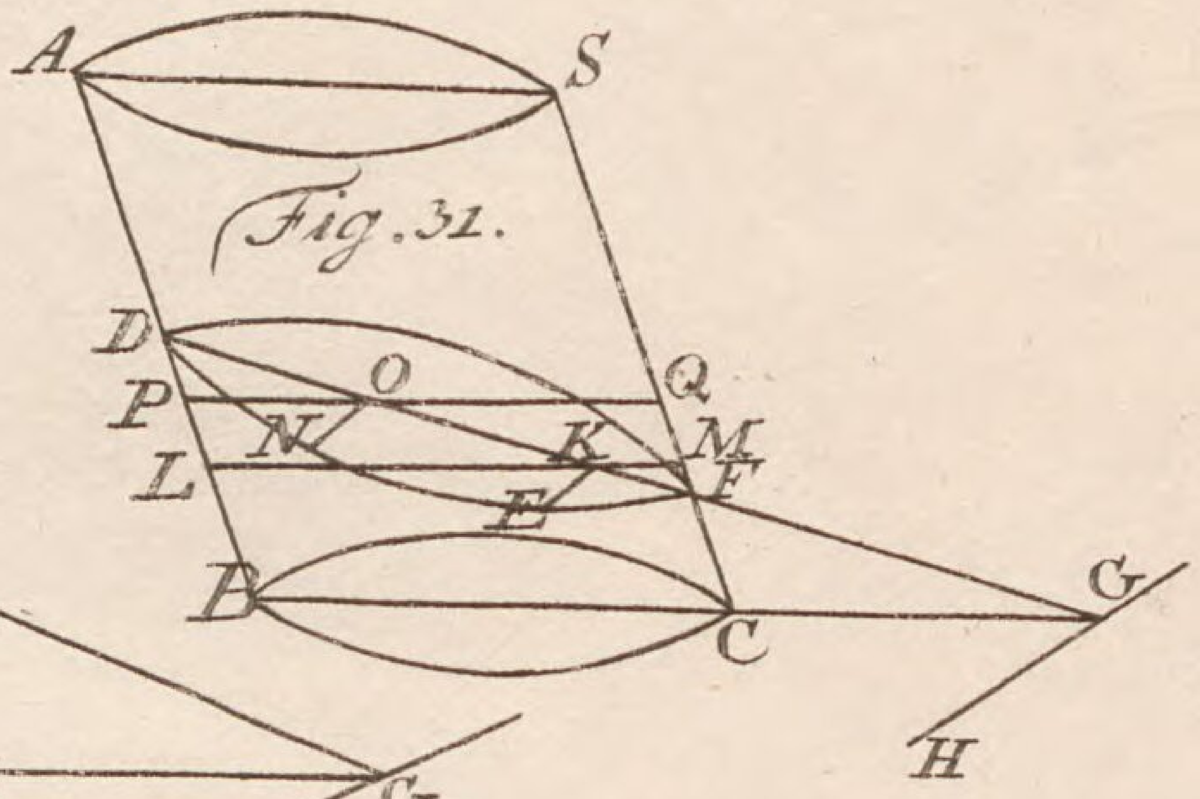


Fig. 31.

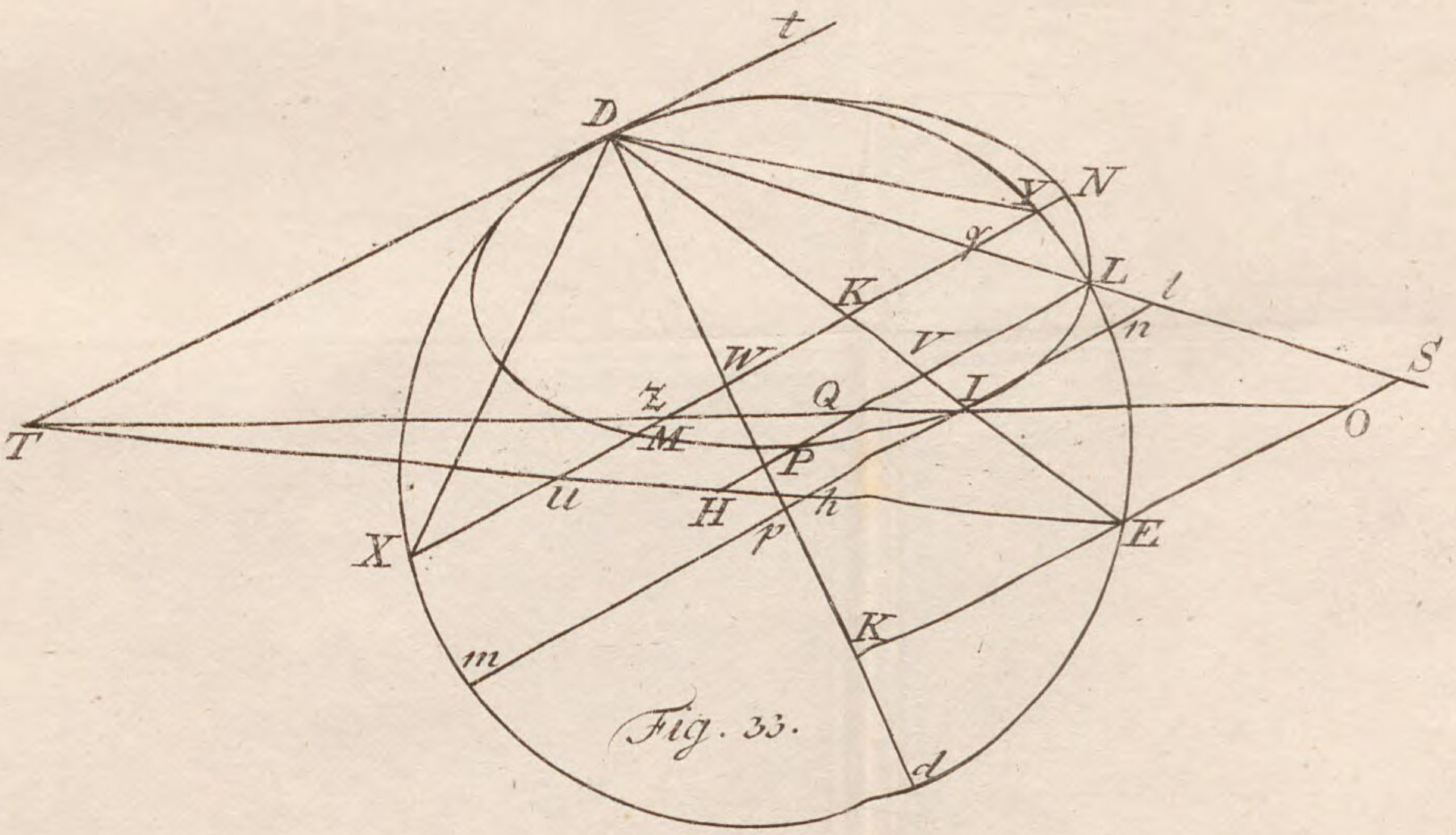


Fig. 33.

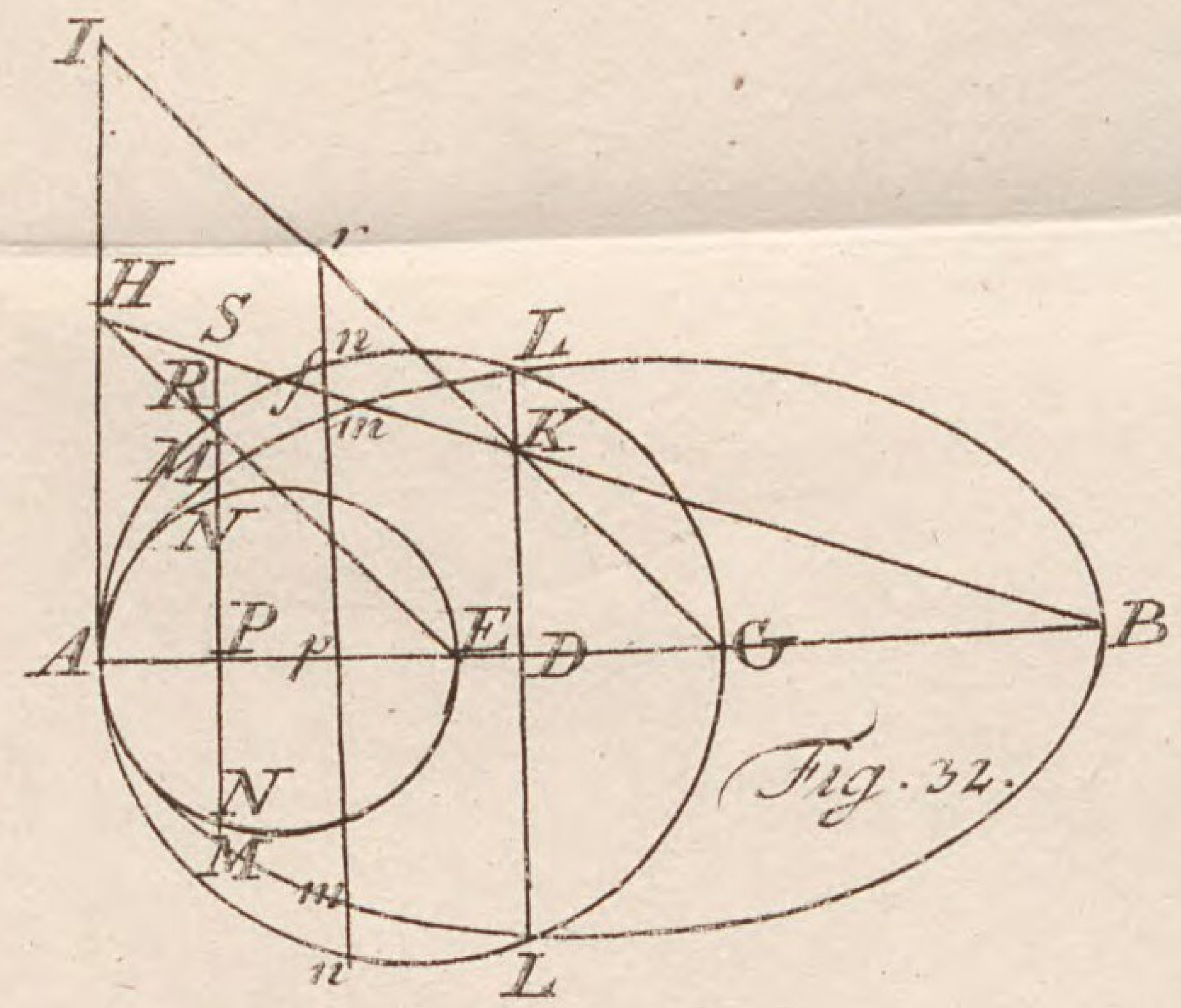


Fig. 32.

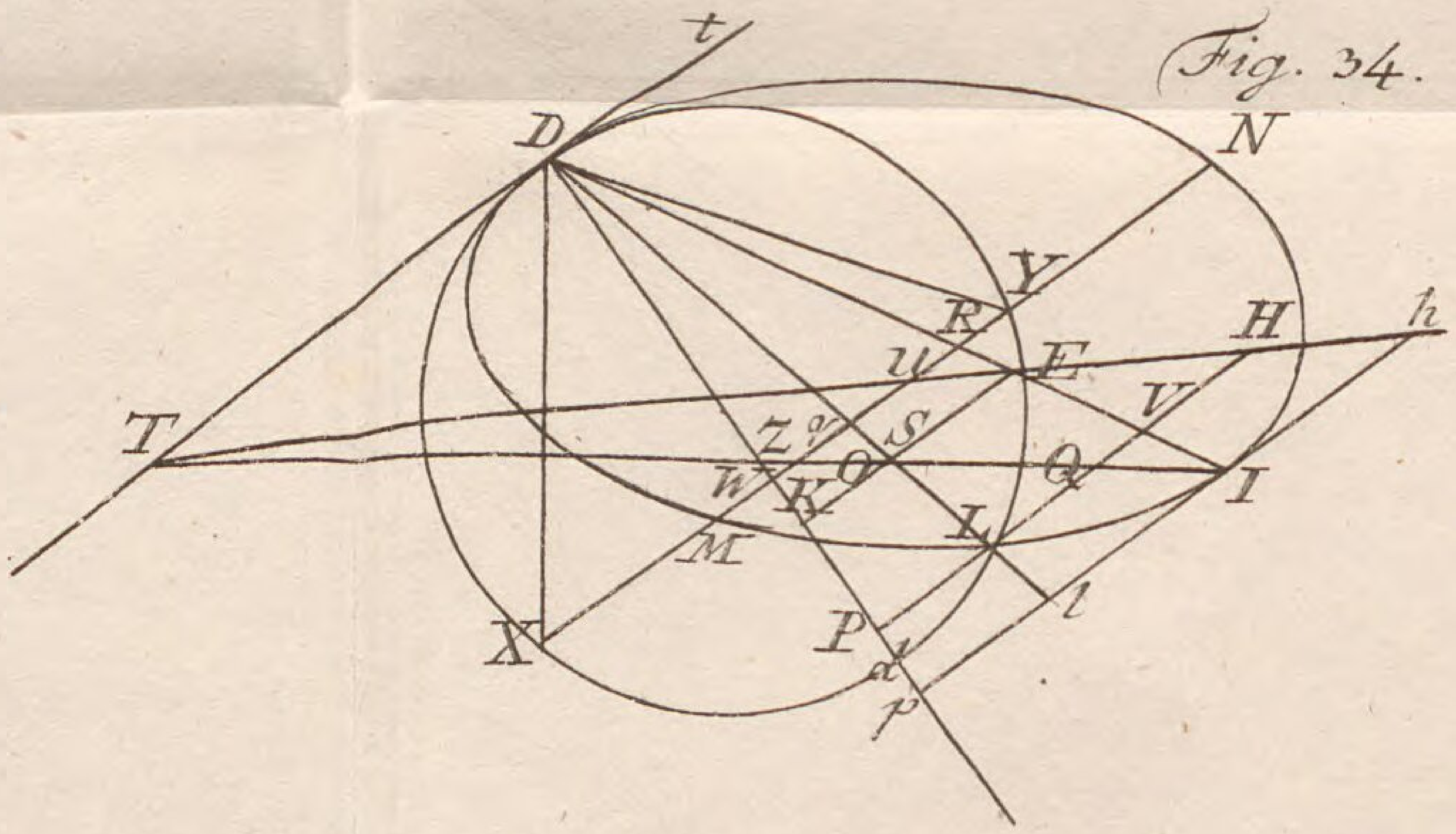


Fig. 34.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

II

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.B. Tab. III.

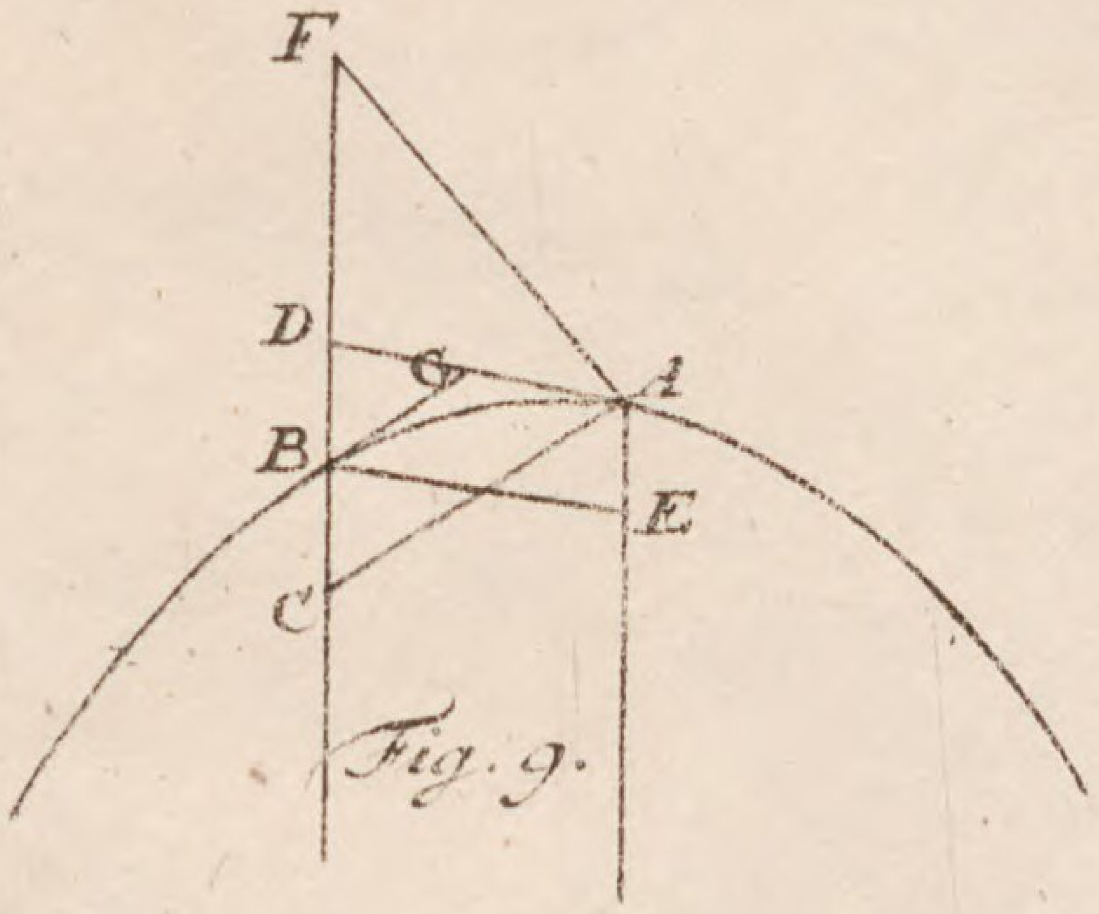


Fig. 9.

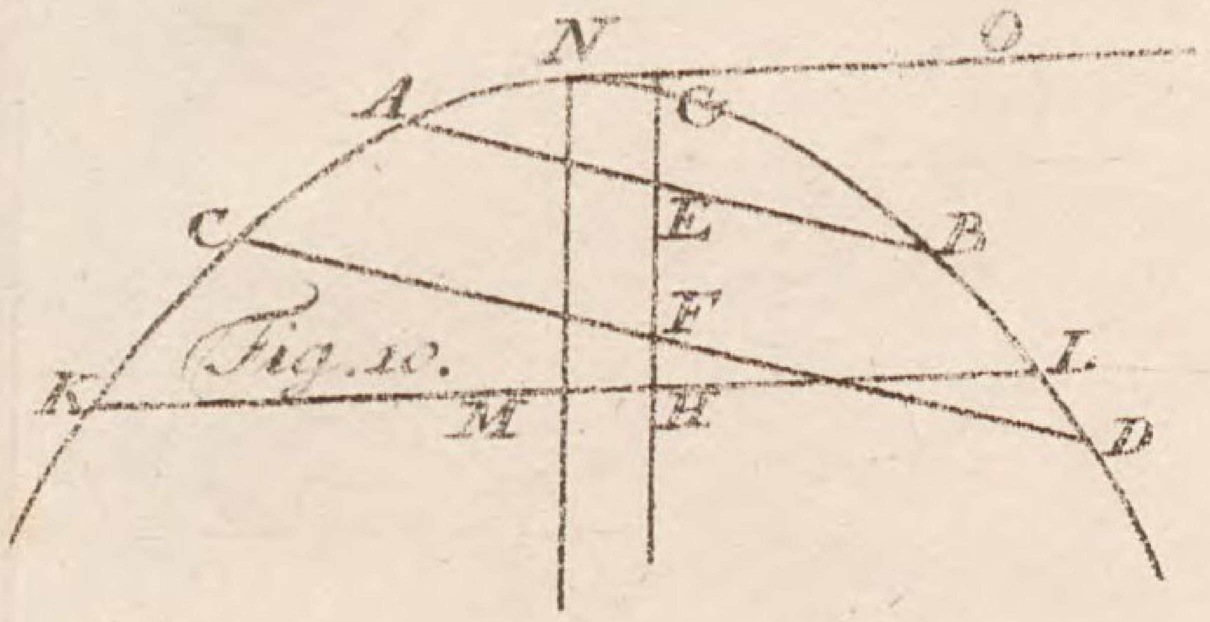


Fig. 10.

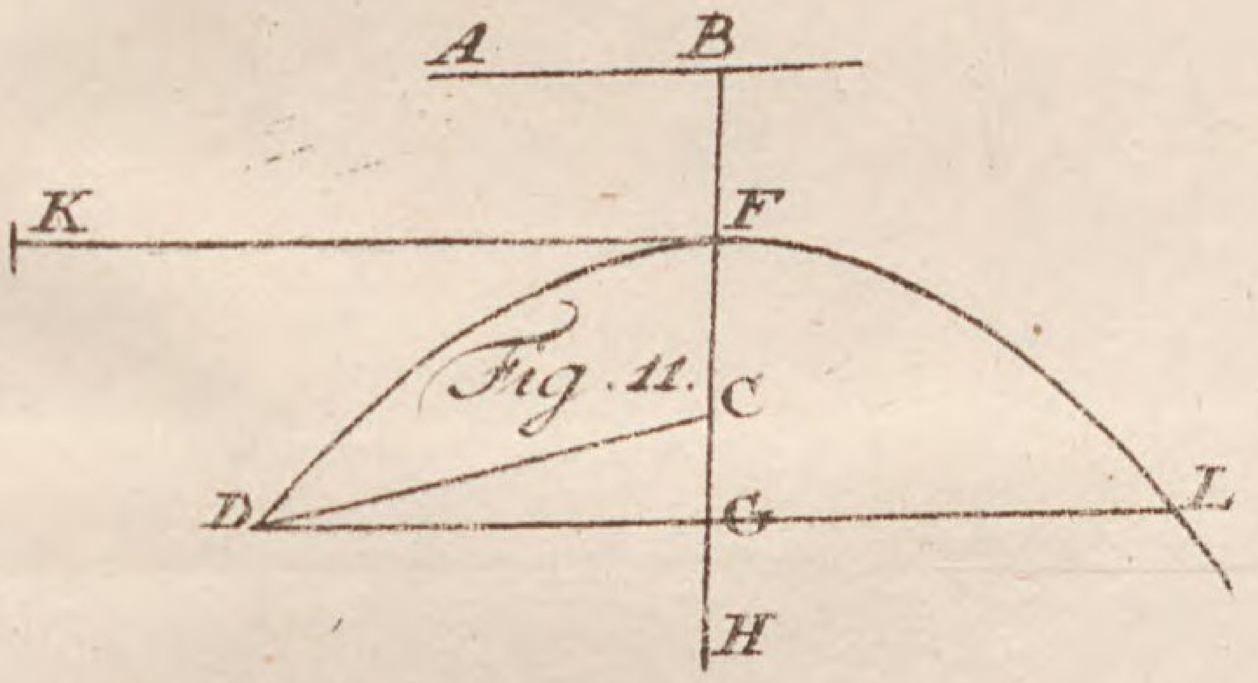


Fig. 11.

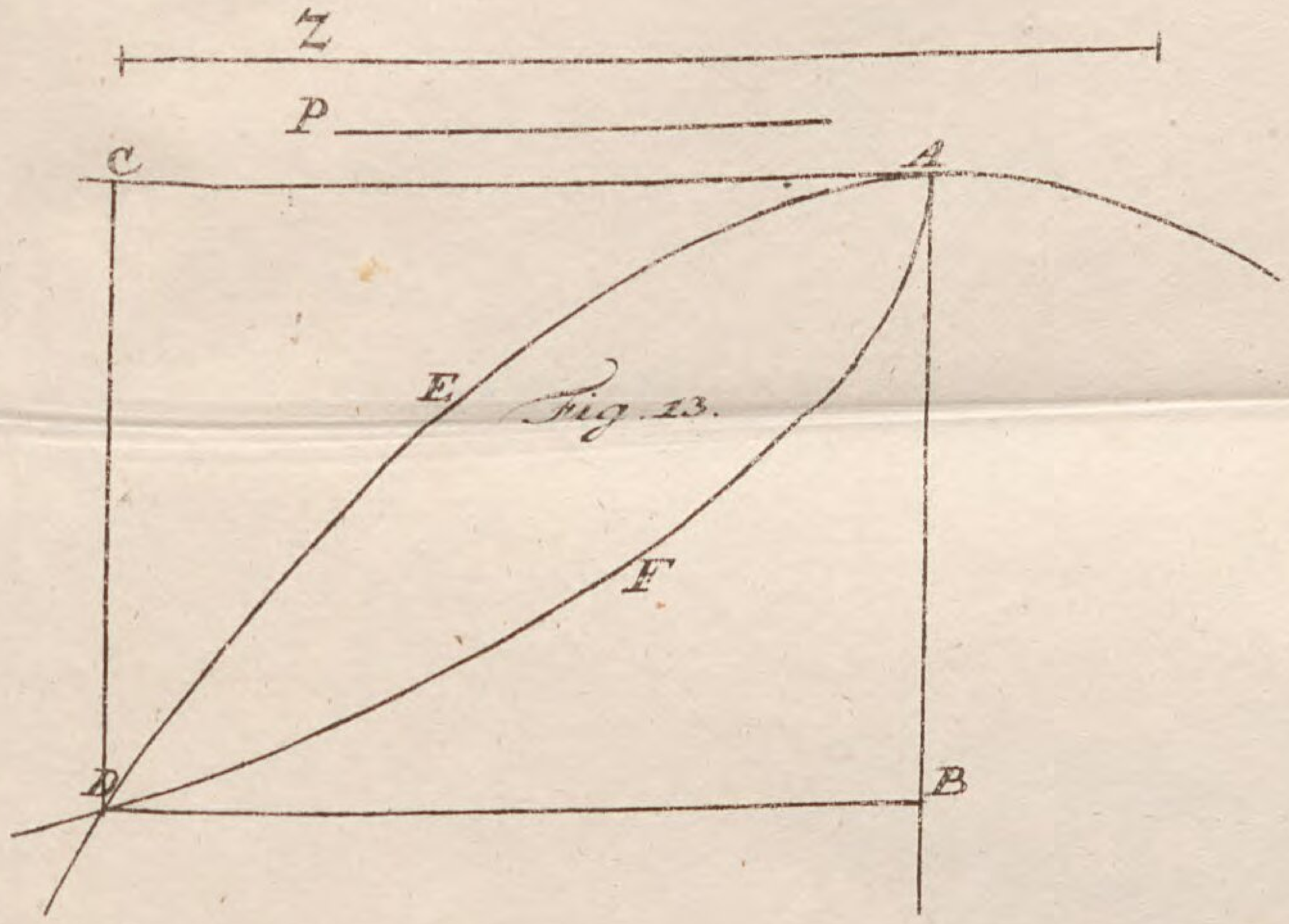


Fig. 13.

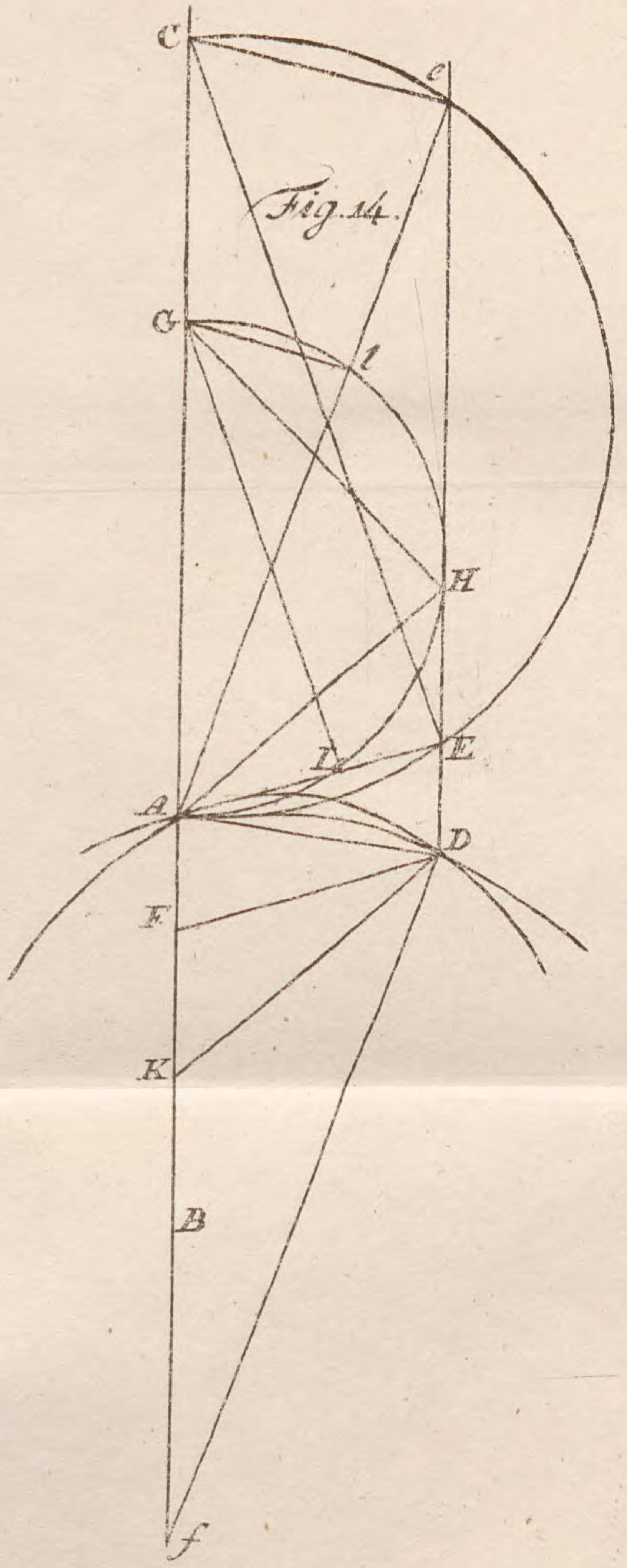


Fig. 14.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

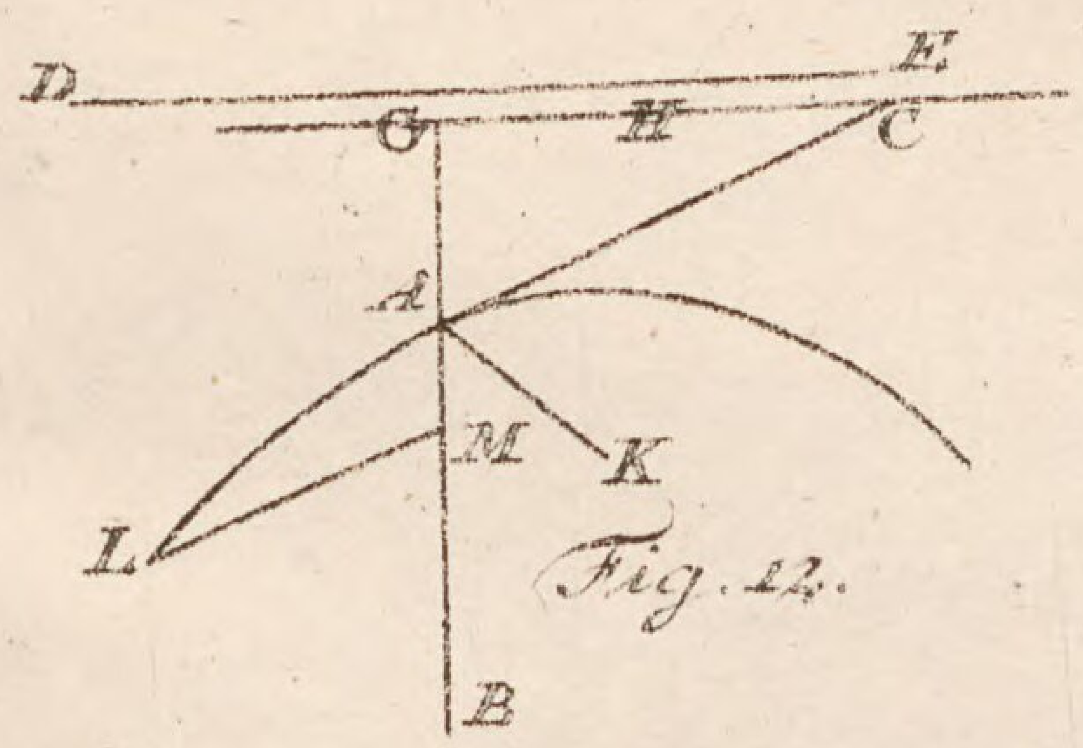


Fig. 12.

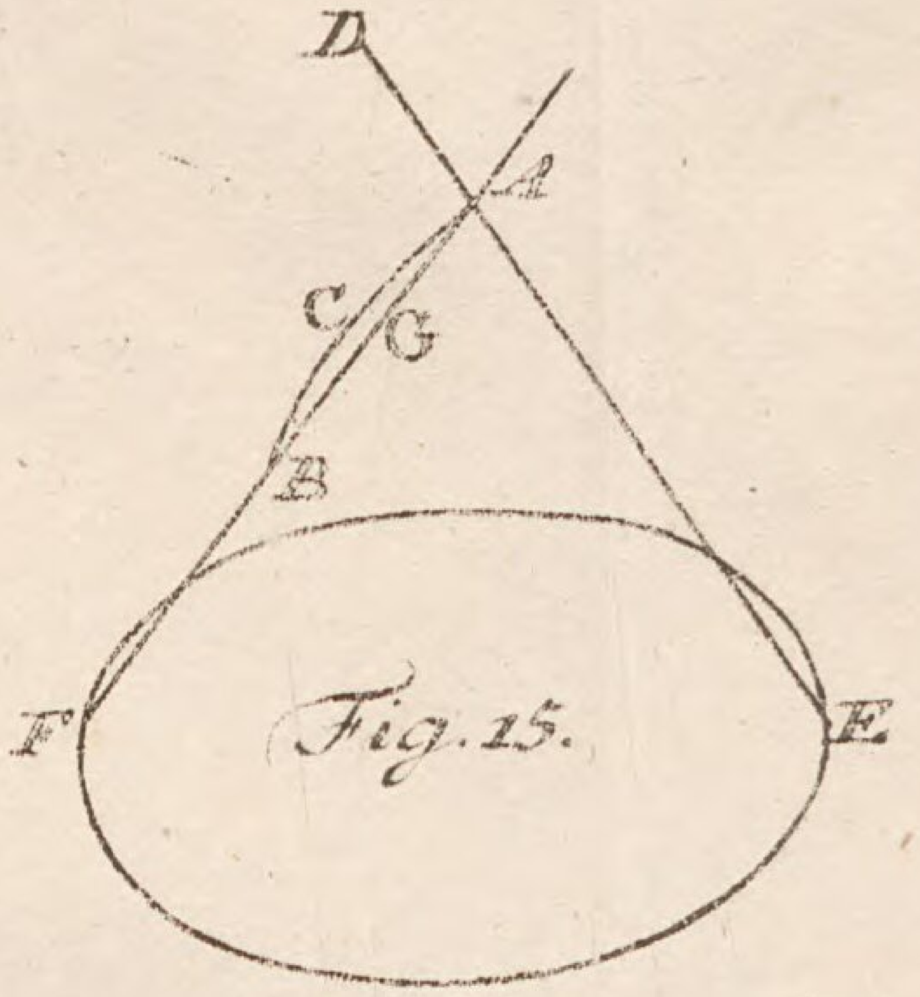


Fig. 15.

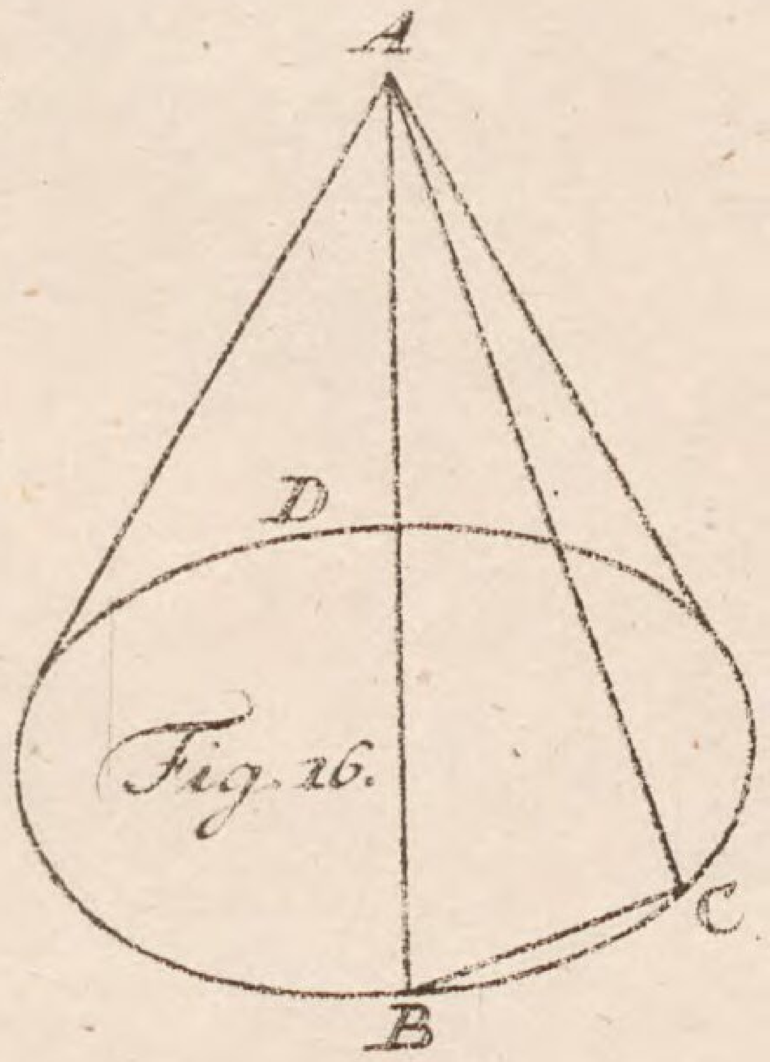


Fig. 16.

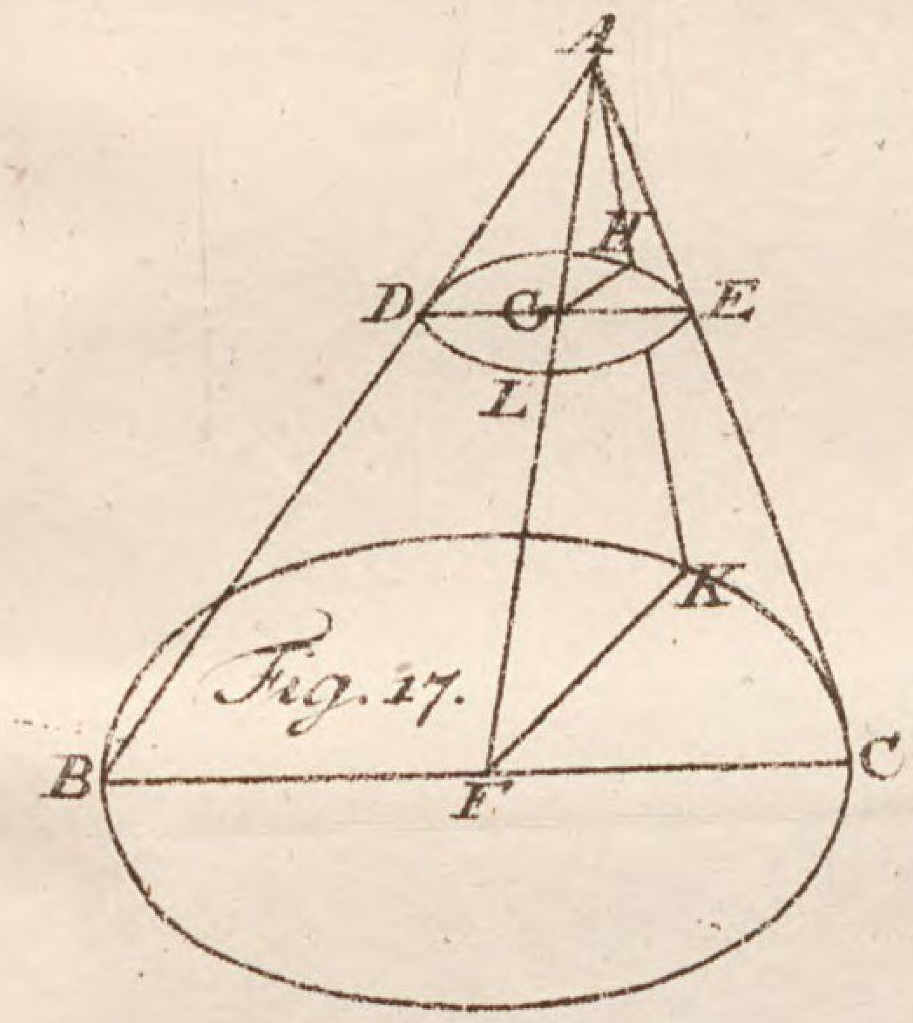


Fig. 17.

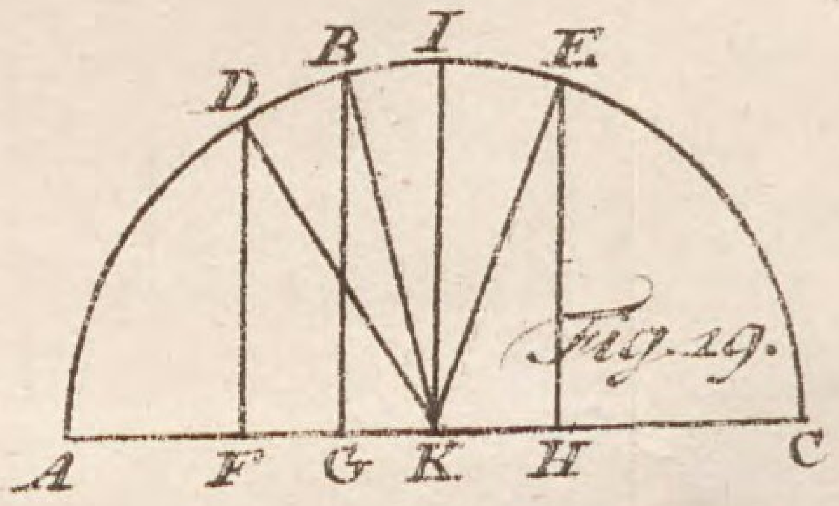


Fig. 19.

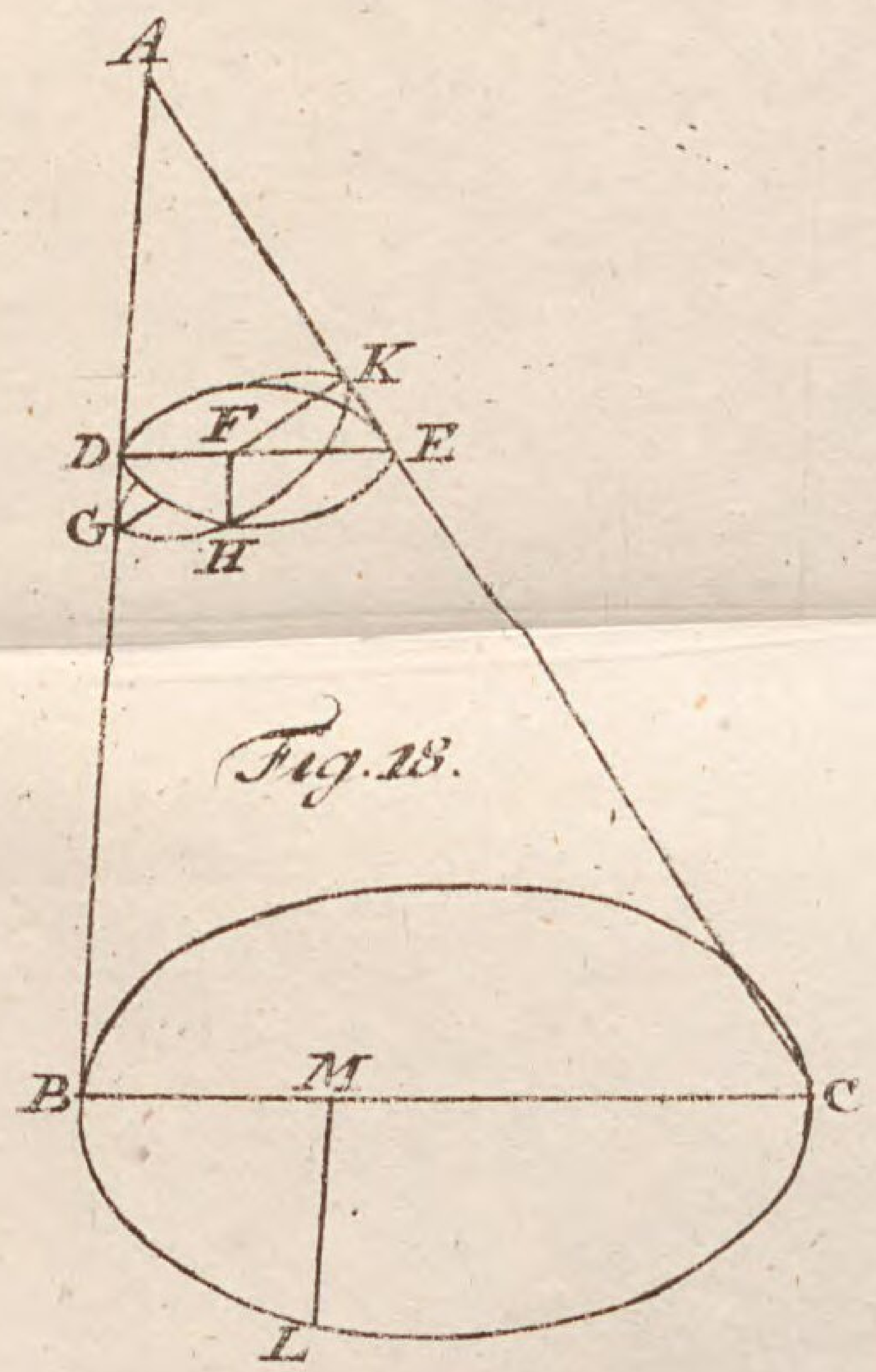


Fig. 18.

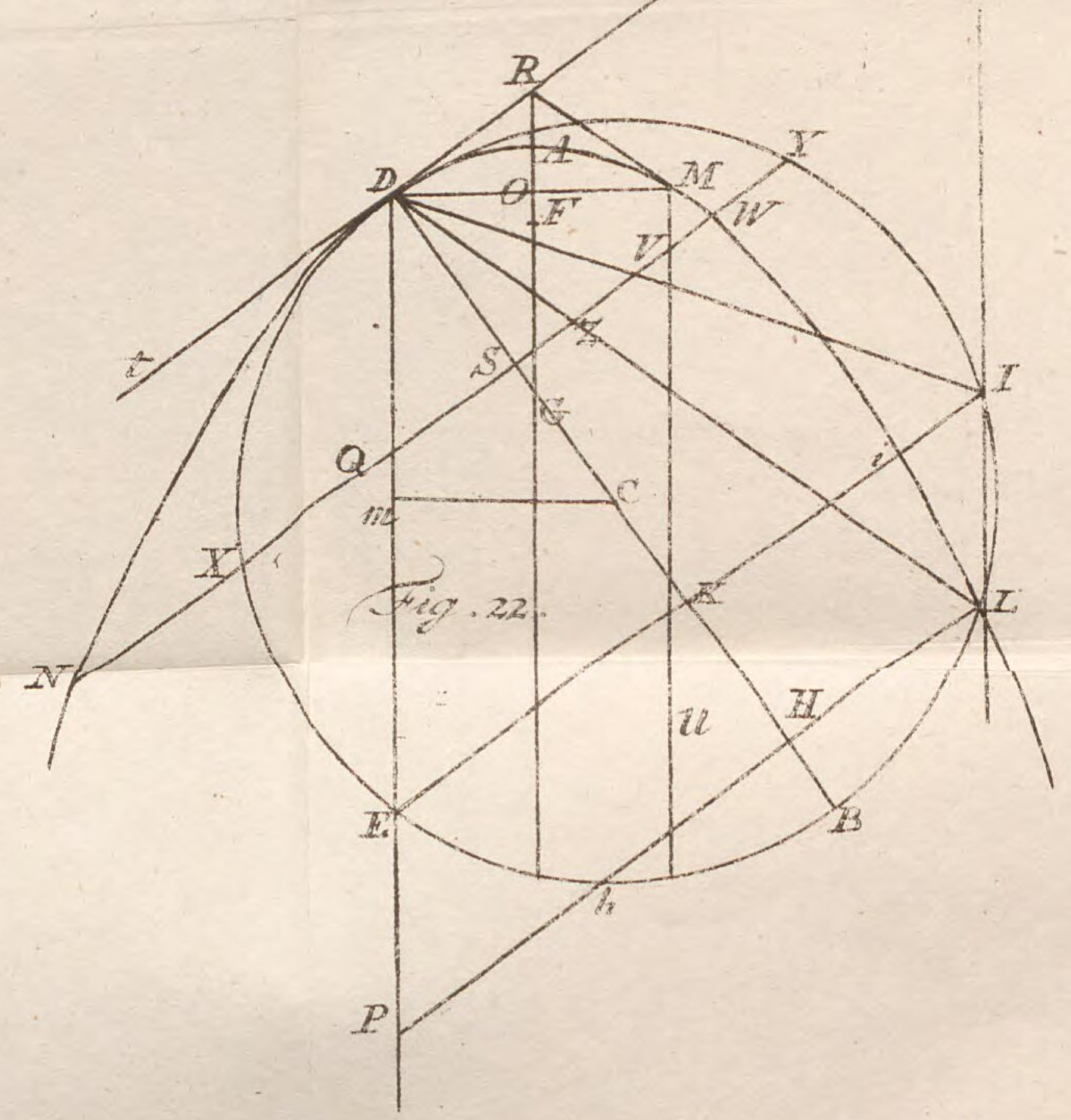


Fig. 22.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.B. Tab. V.

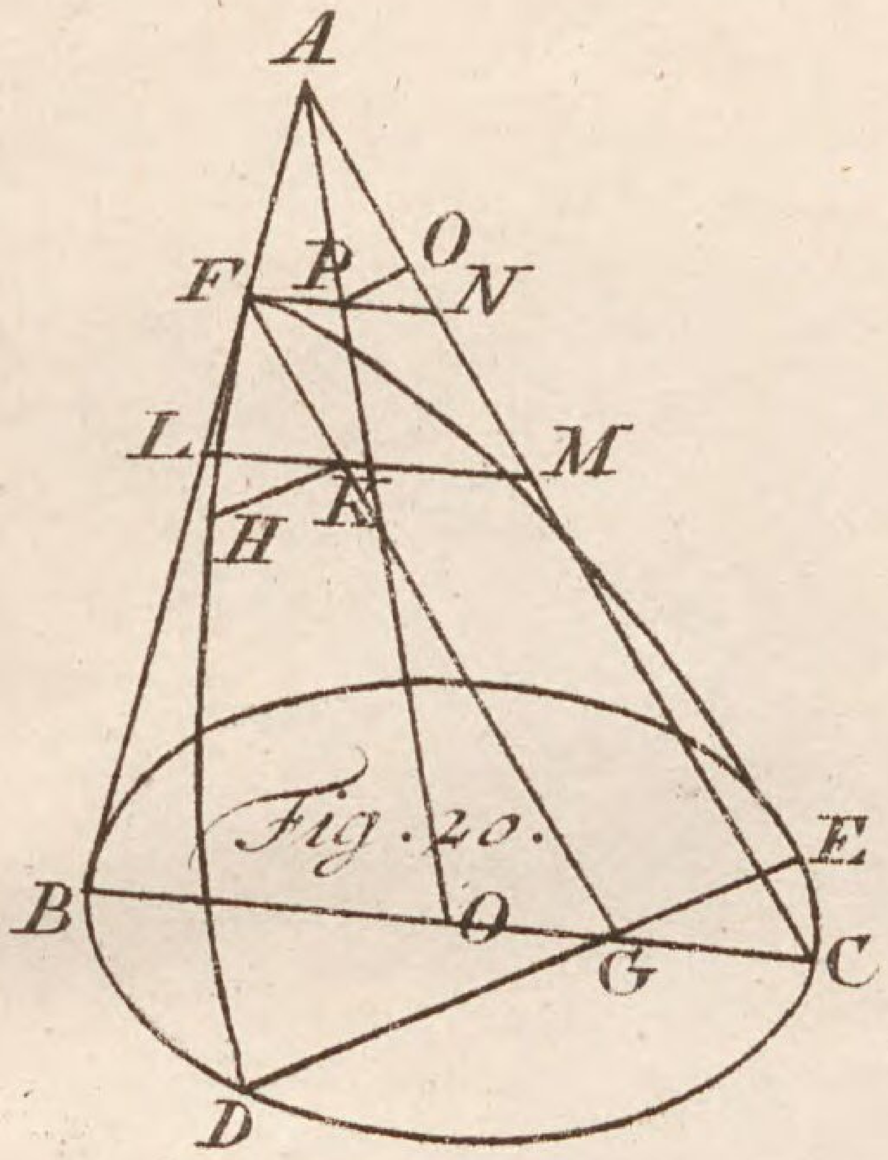


Fig. 20.

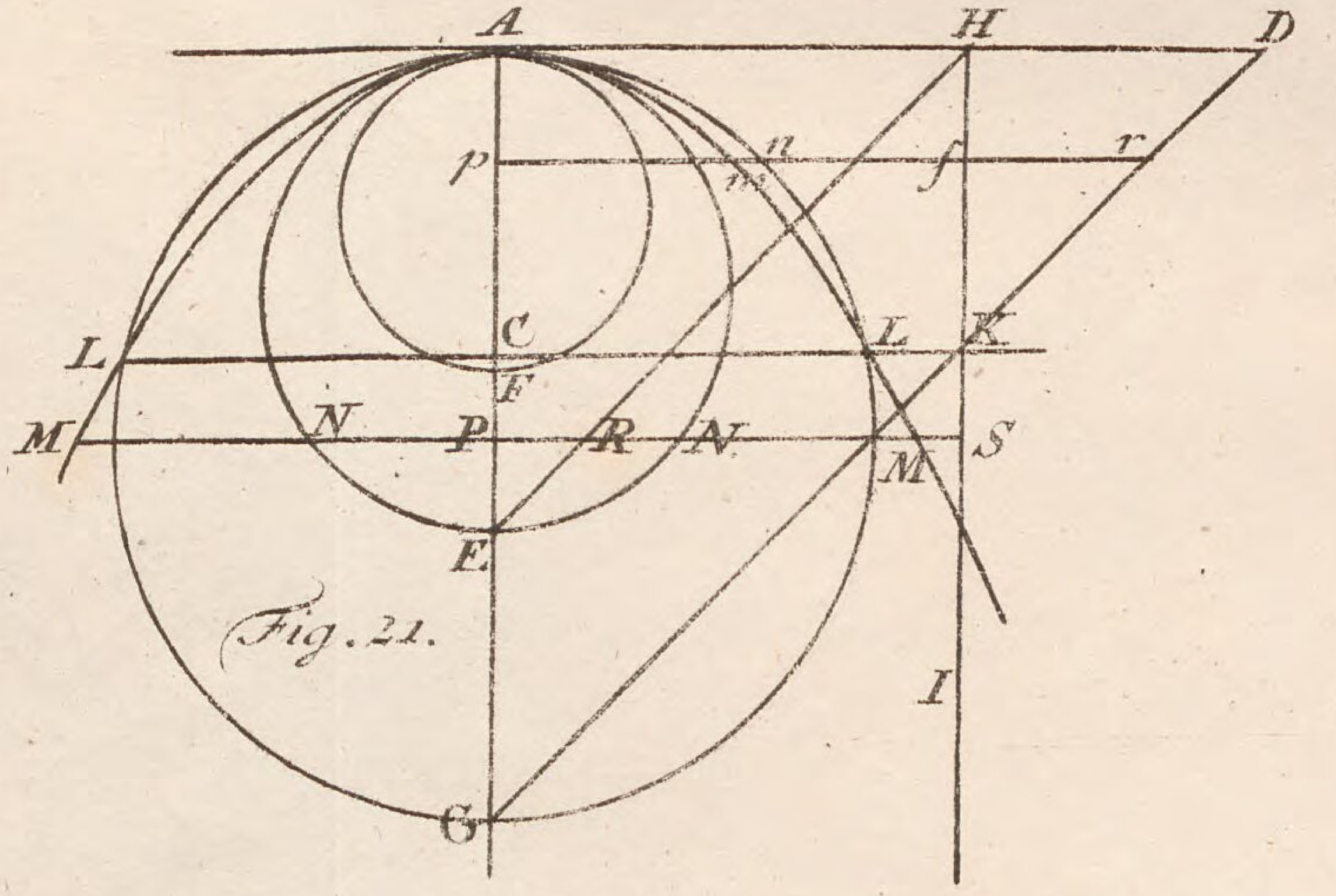


Fig. 21.

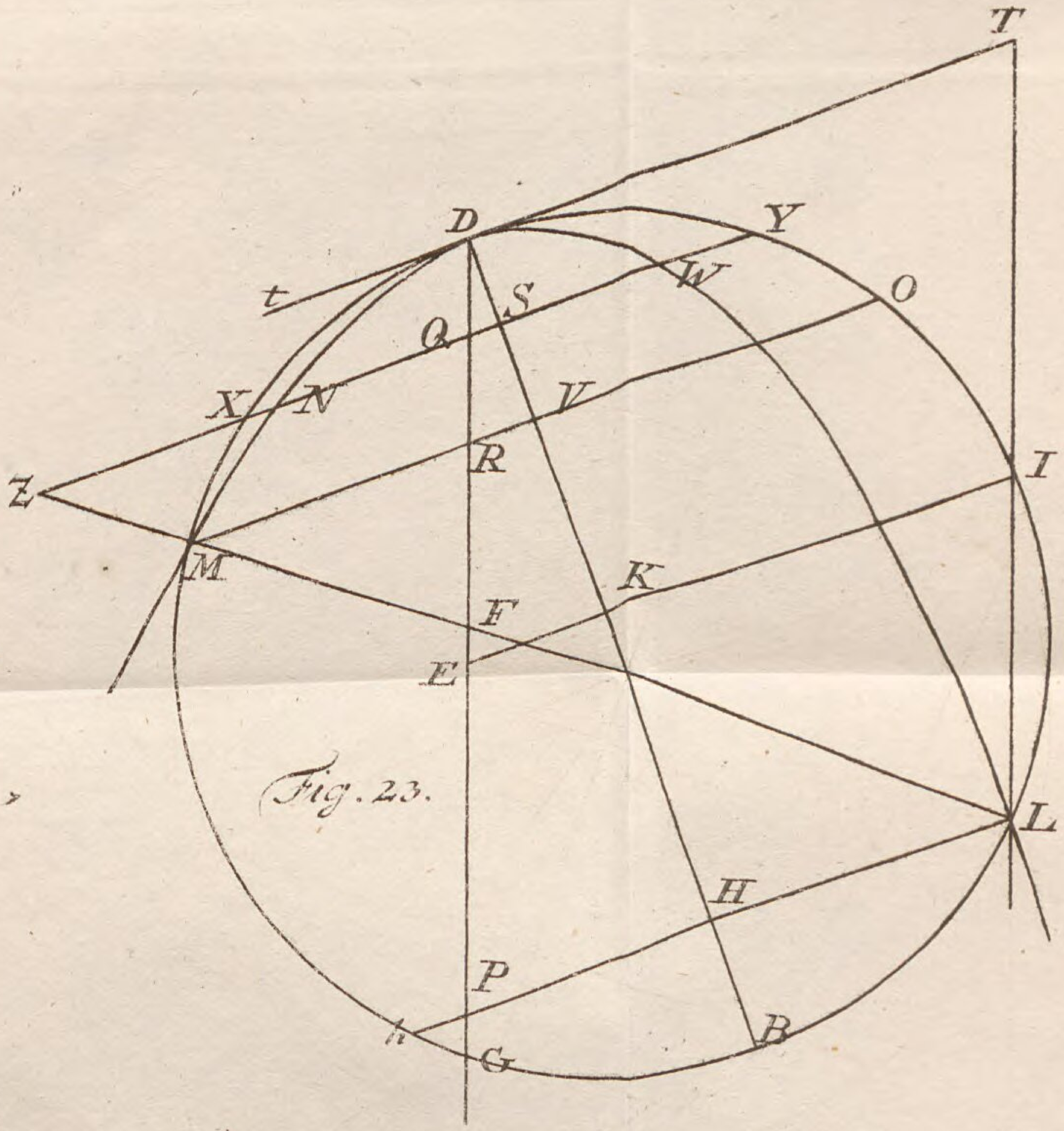
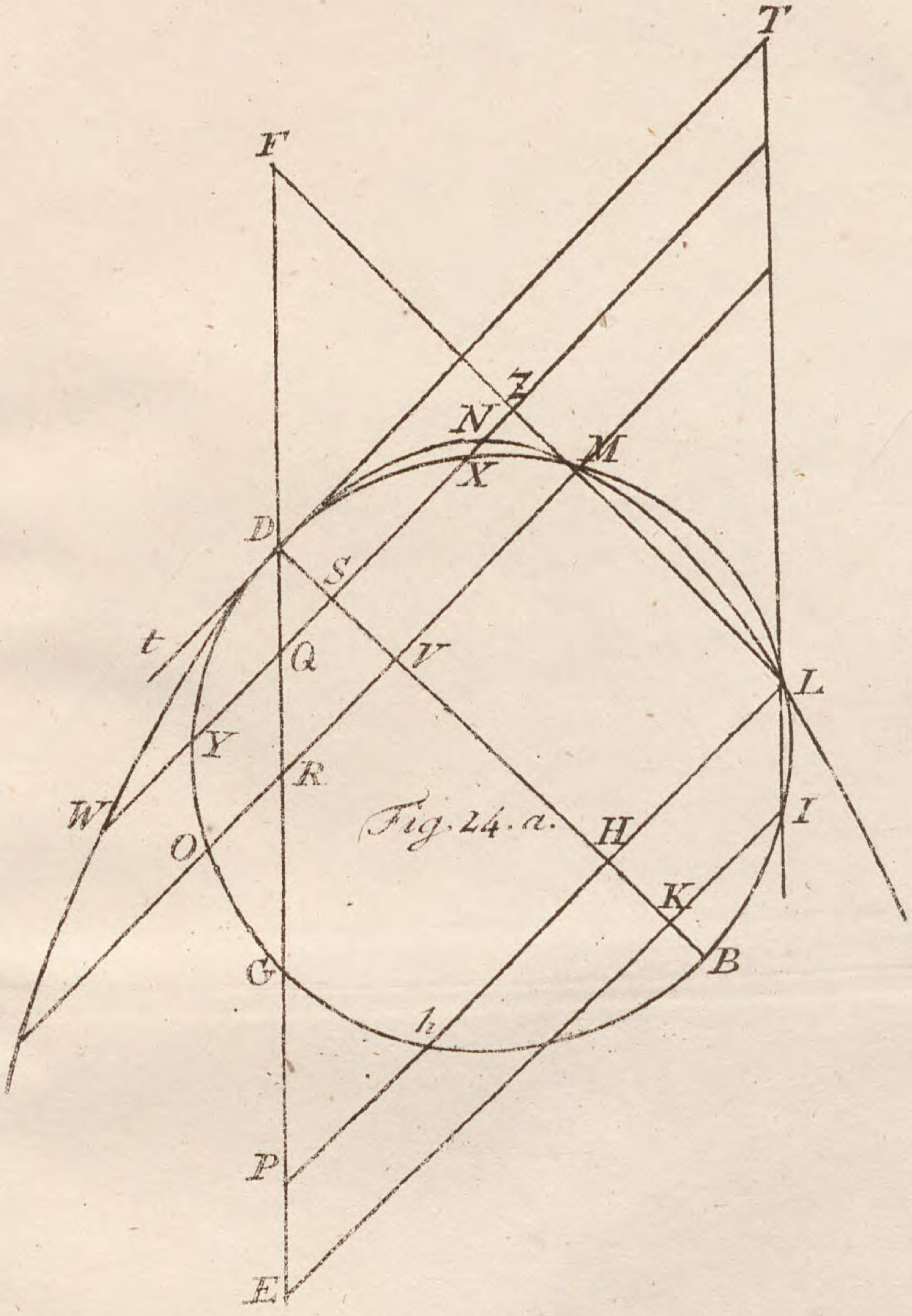
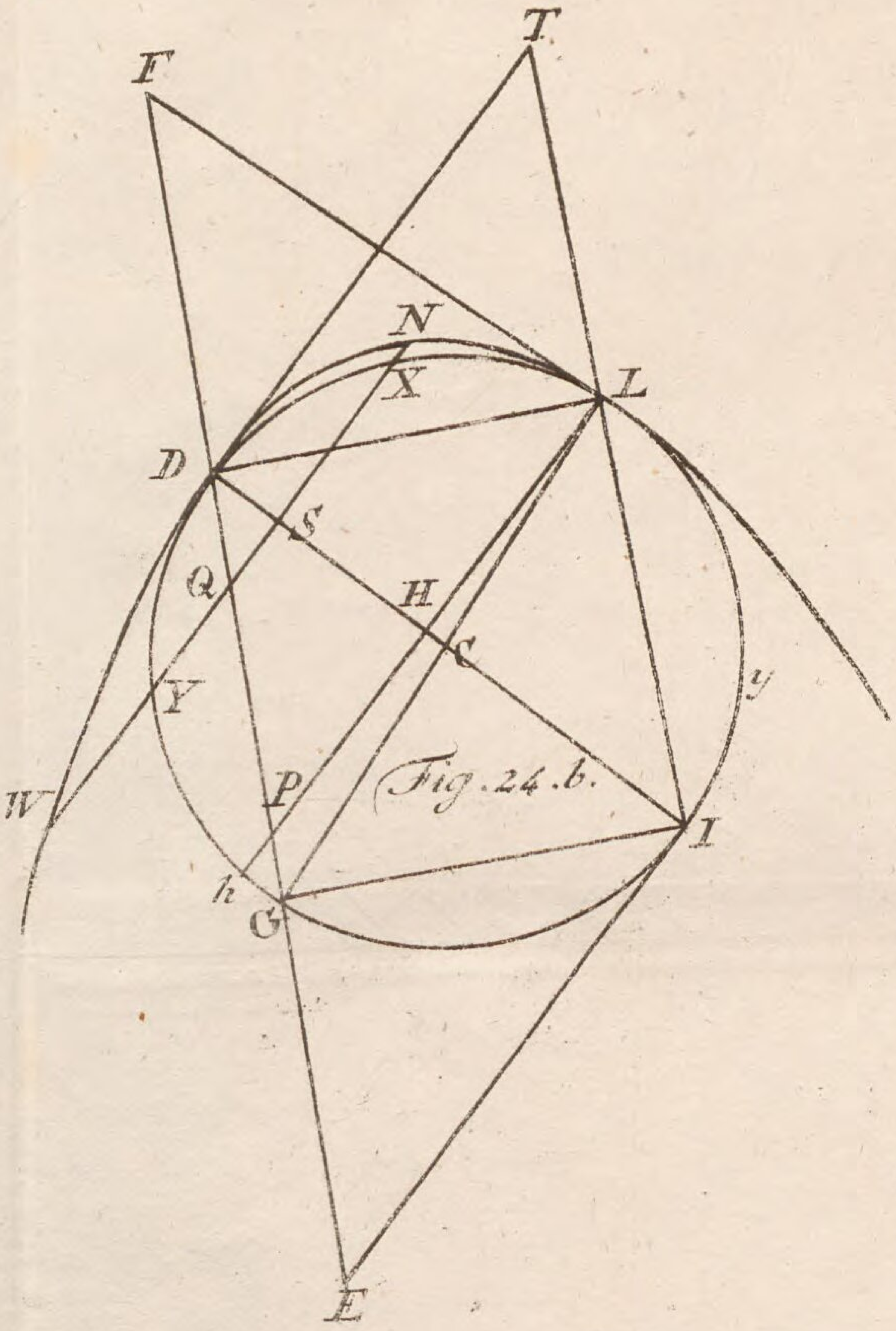


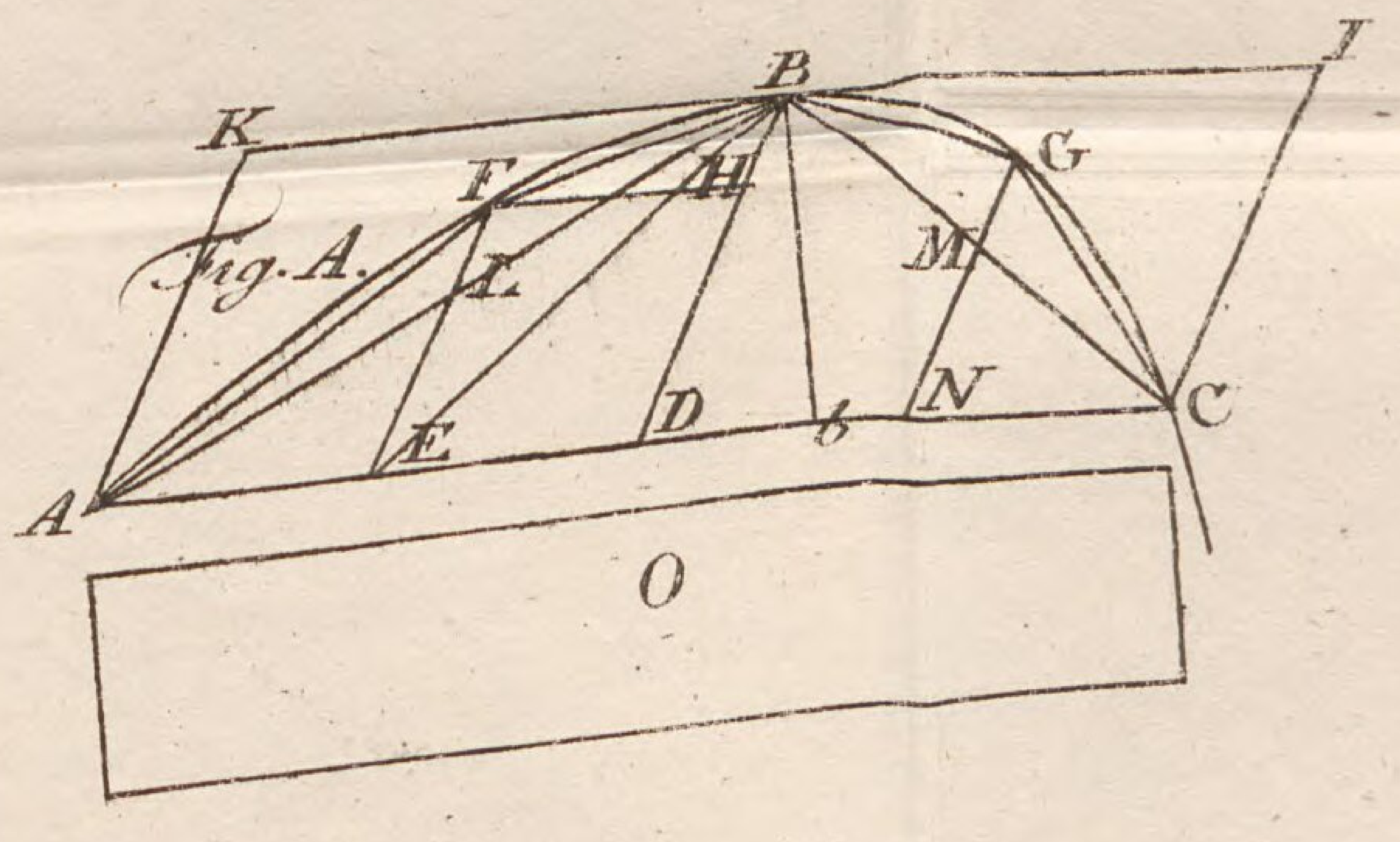
Fig. 23.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.B. Tab. VI.


T
F
Z
N
M
X
D
S
t
Q
V
L
Y
R
W
I
O
Fig. 24. a.
H
K
G
B
h
P
E


T
F
N
X
L
D
S
Q
H
C
Y
y
W
P
Fig. 24. b.
I
h
G
E


B
I
K
G
F
H
Fig. A.
L
M
D
N
C
Æ
b
A
O

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.B. Tab.I.

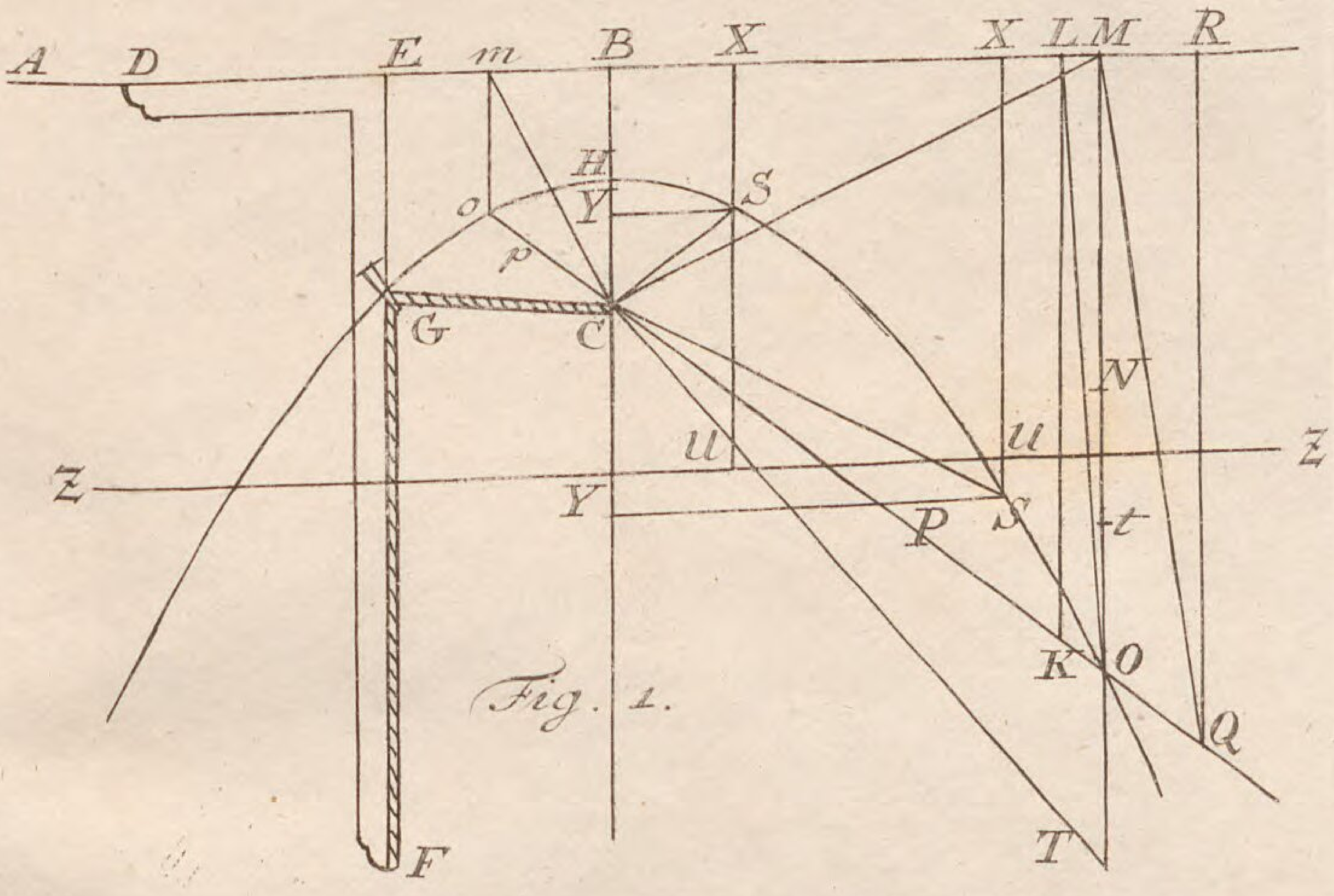


Fig. 1.

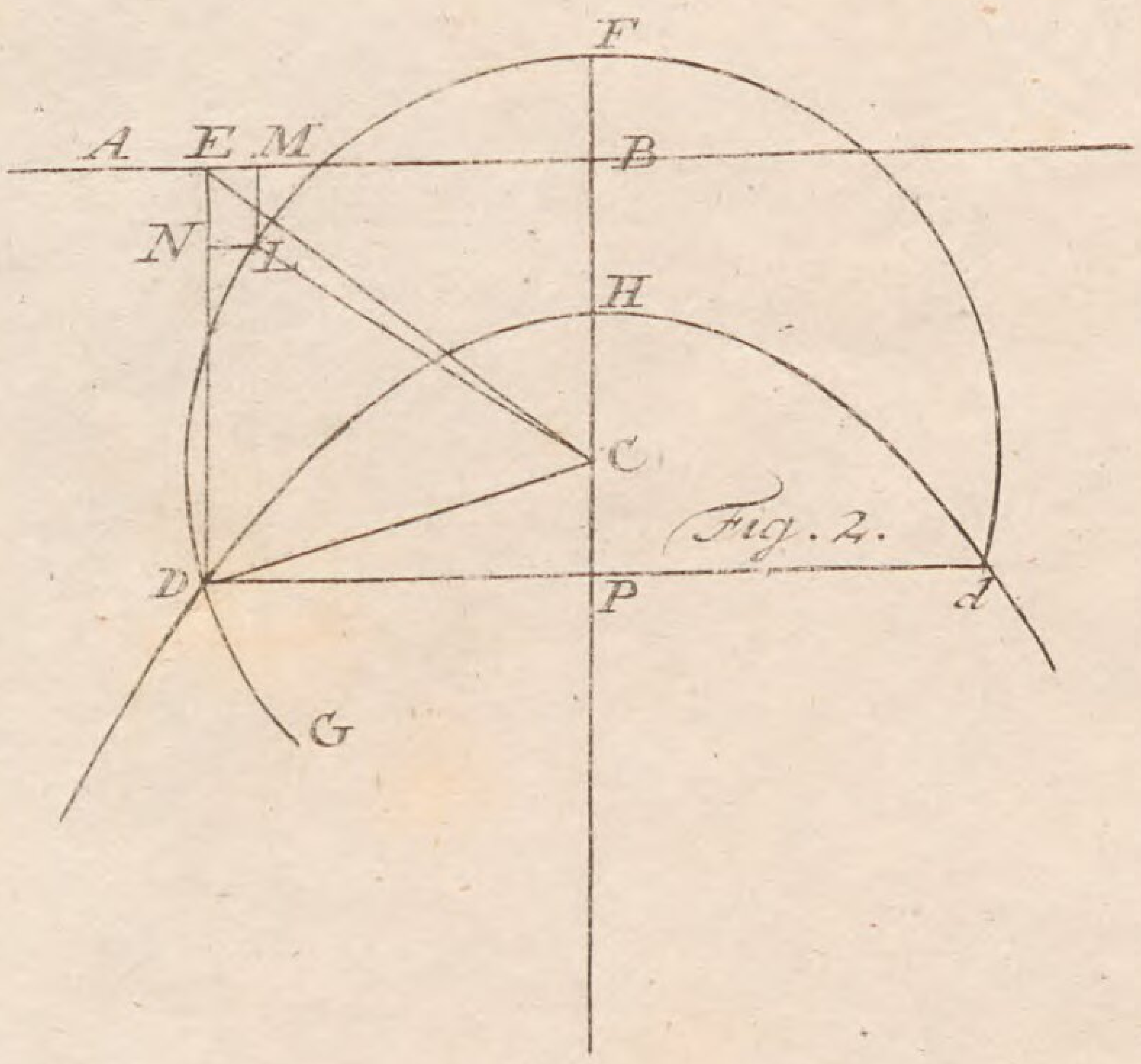


Fig. 2.

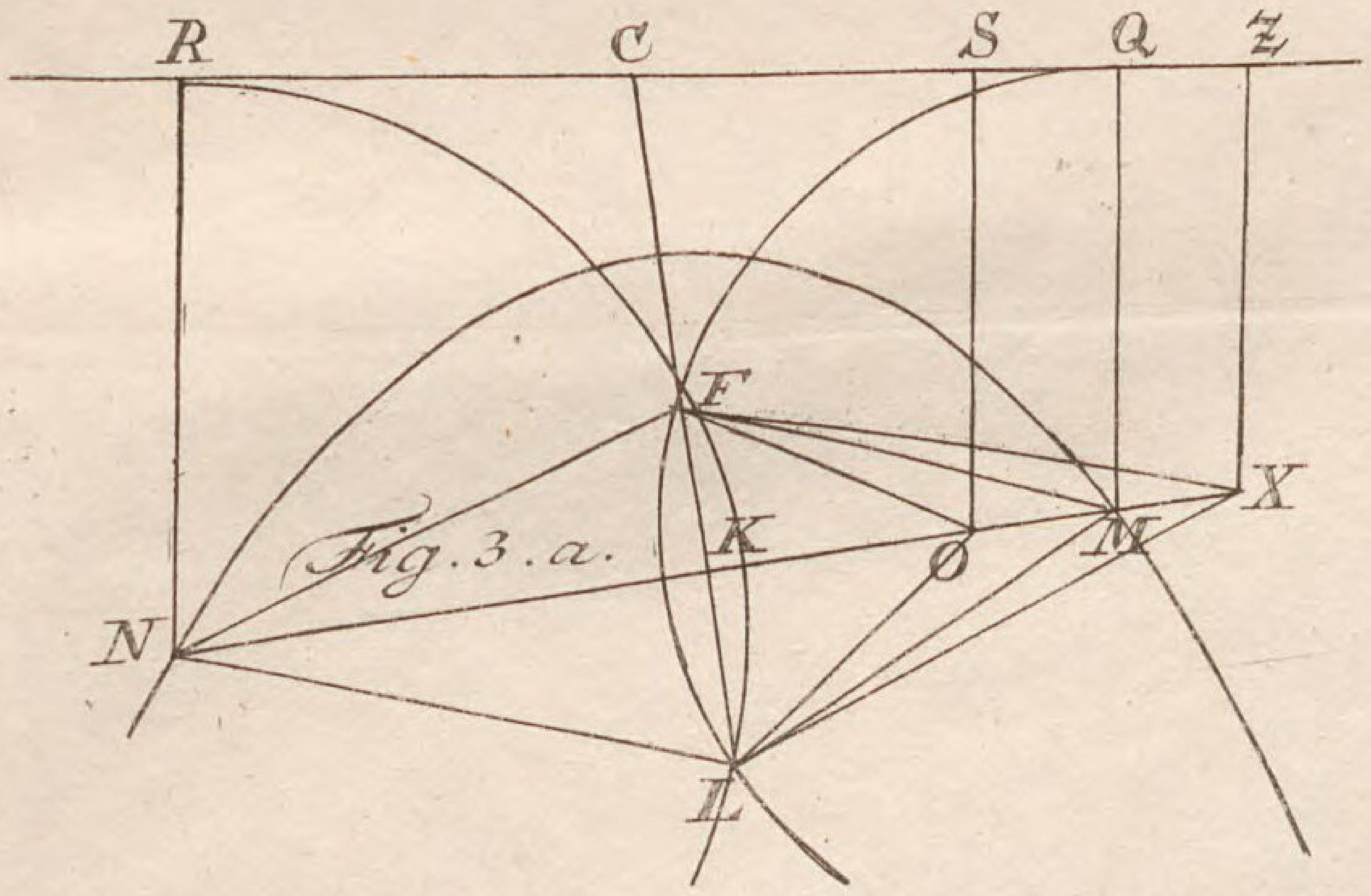


Fig. 3. a.

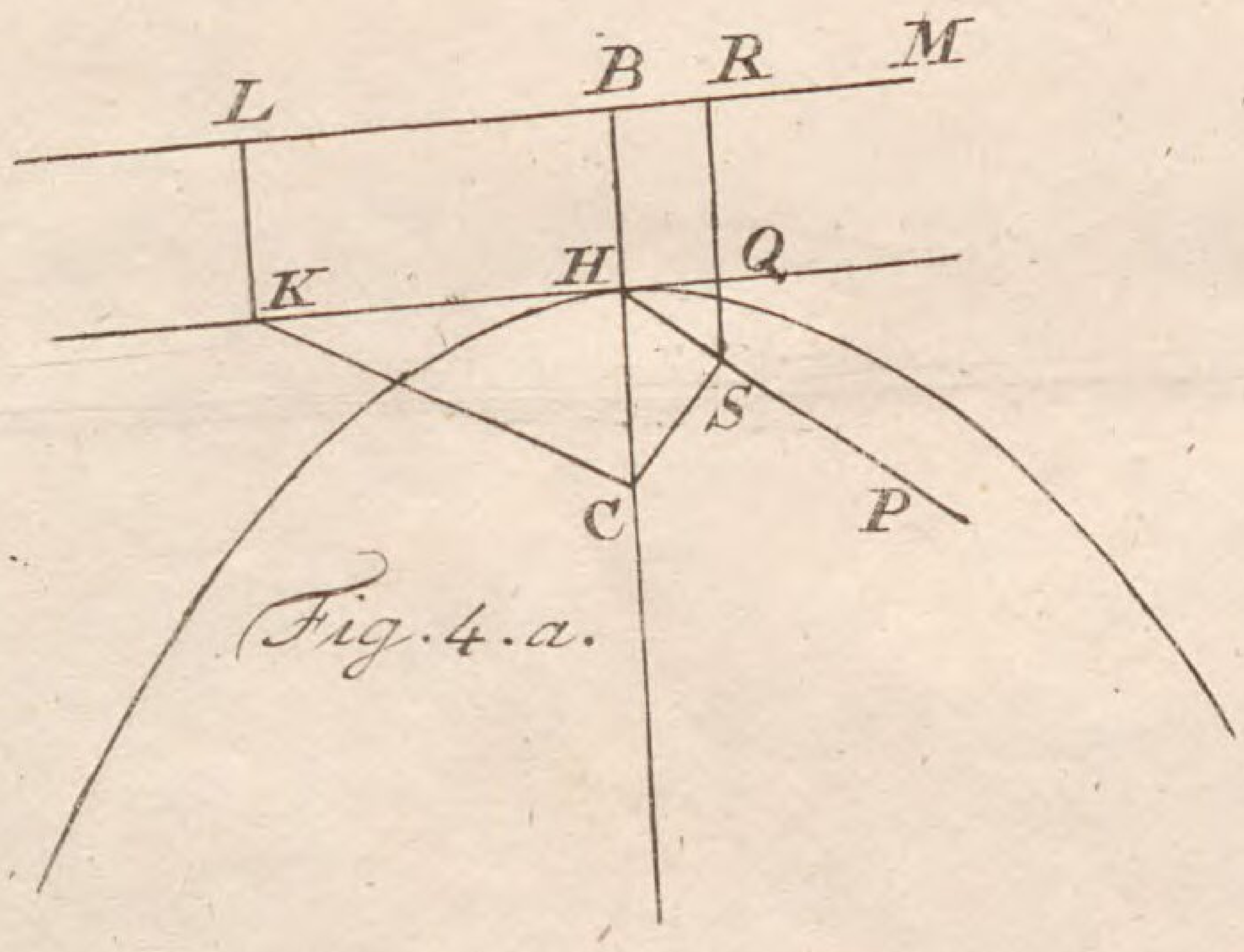


Fig. 4. a.

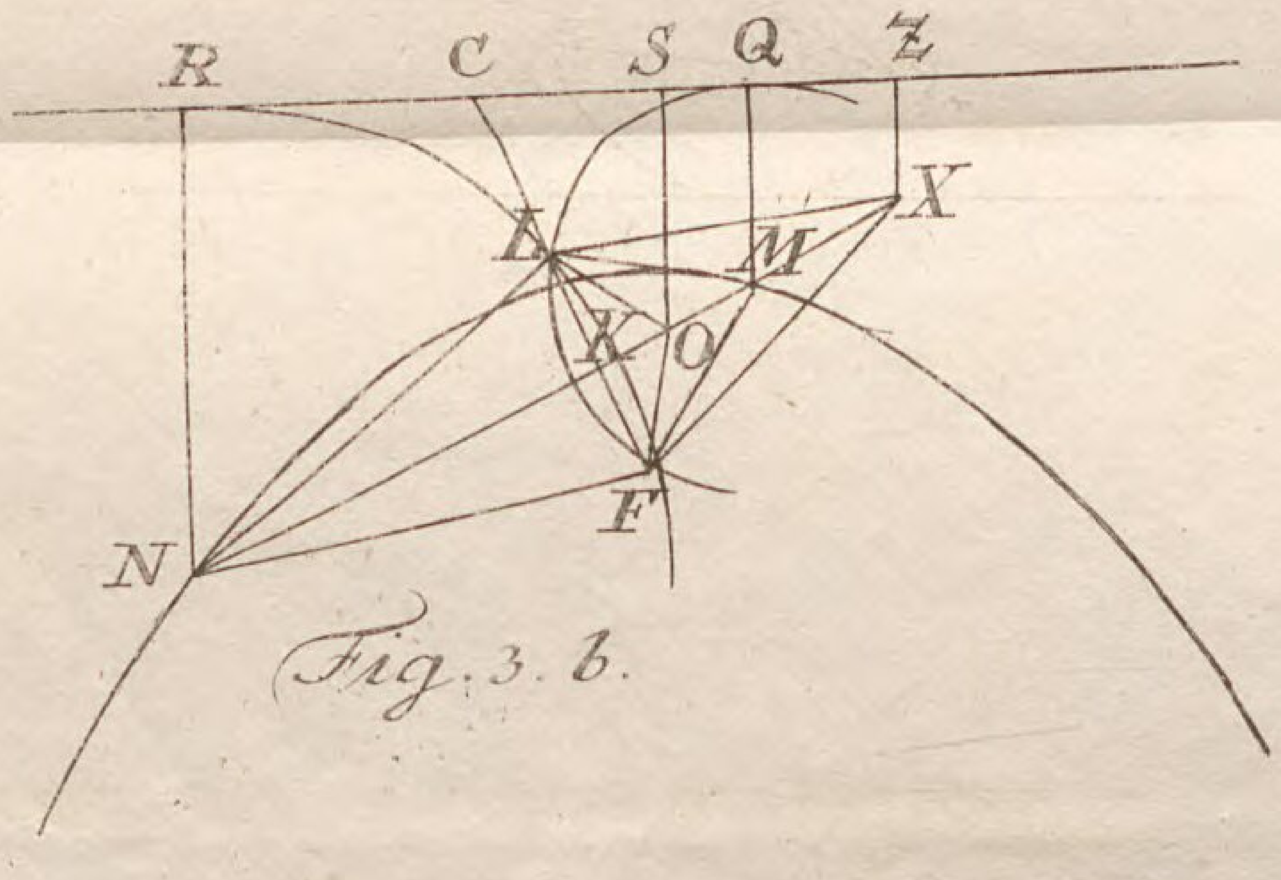


Fig. 3. b.

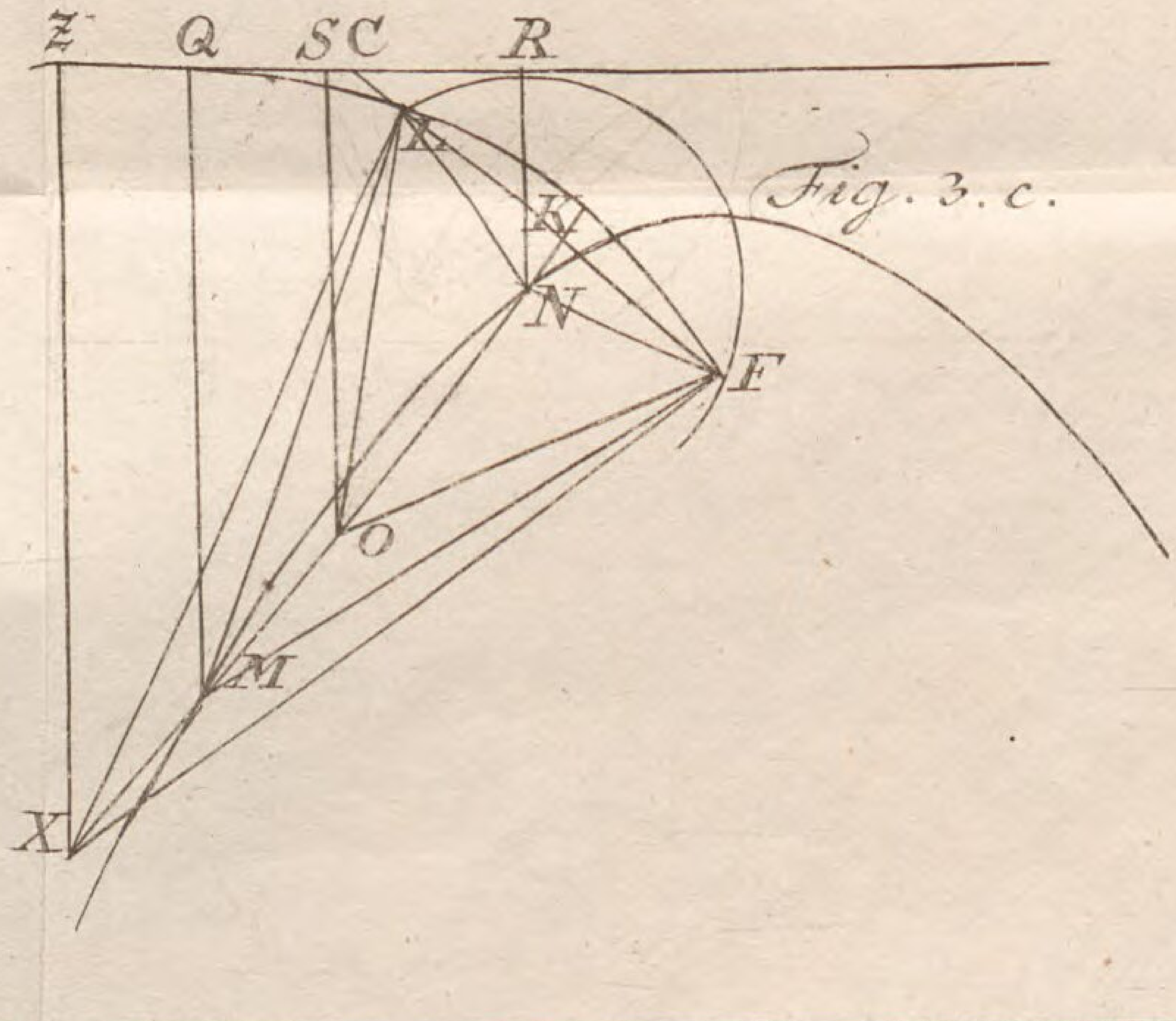


Fig. 3. c.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.B. Tab. II.

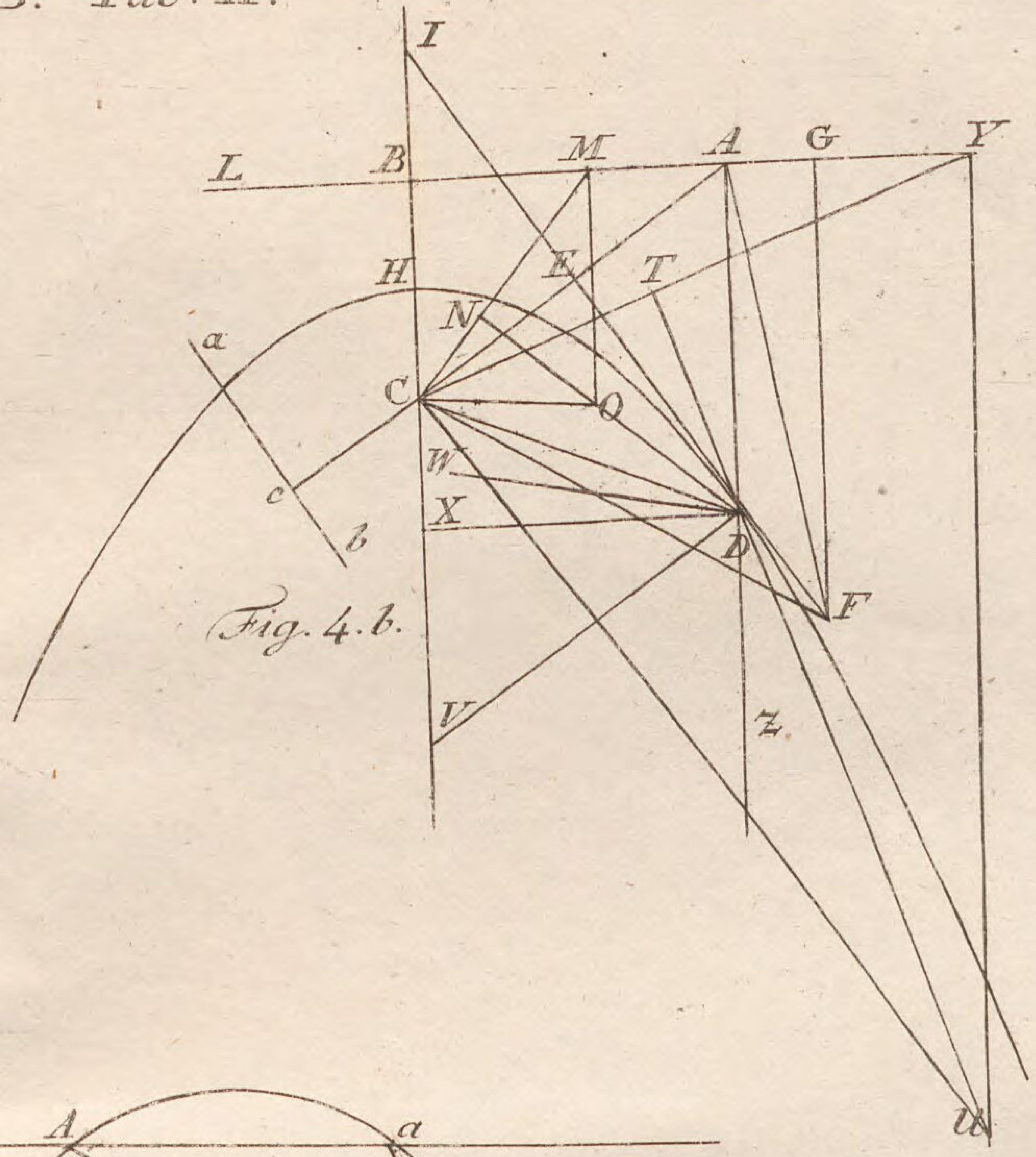


Fig. 4. b.

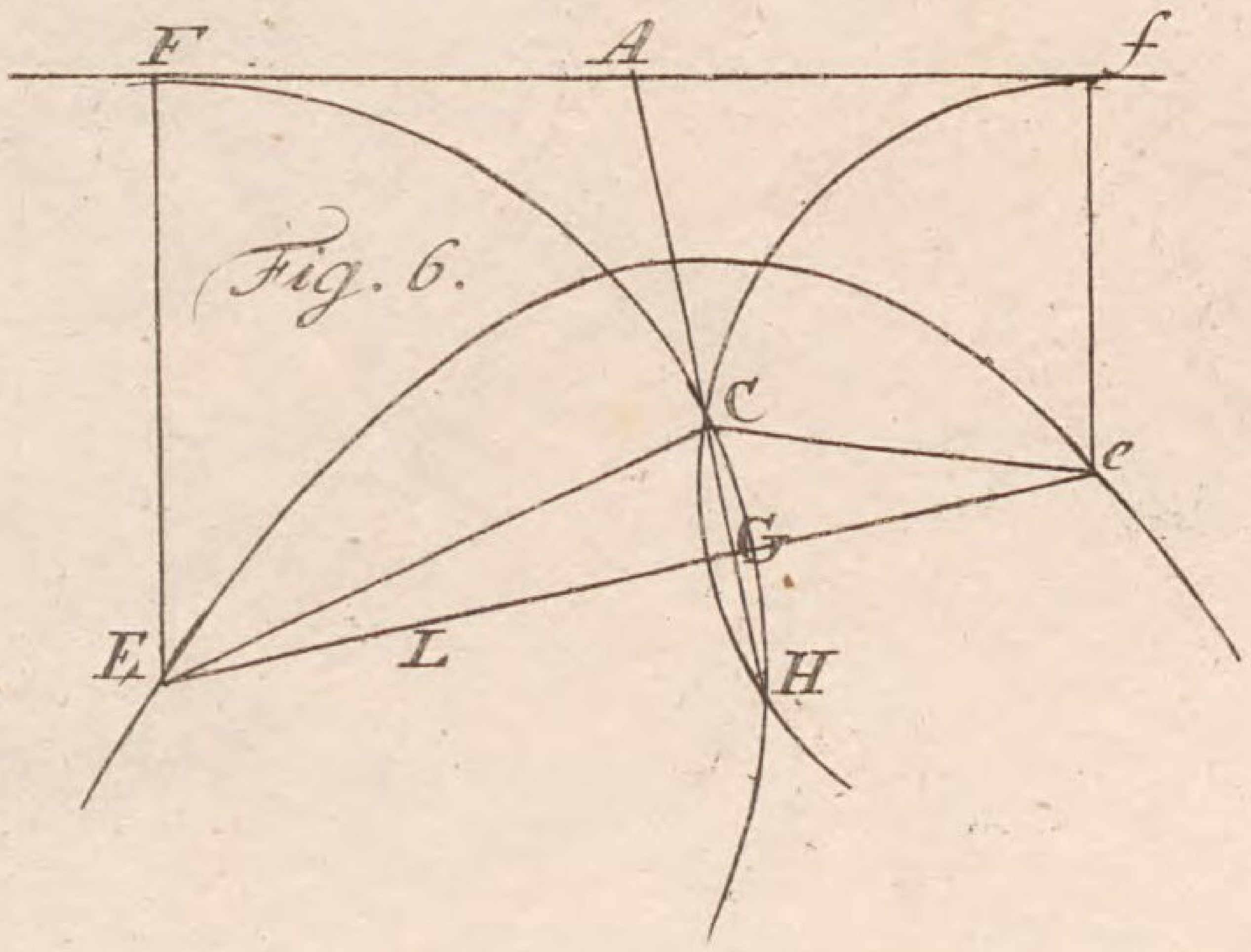


Fig. 6.

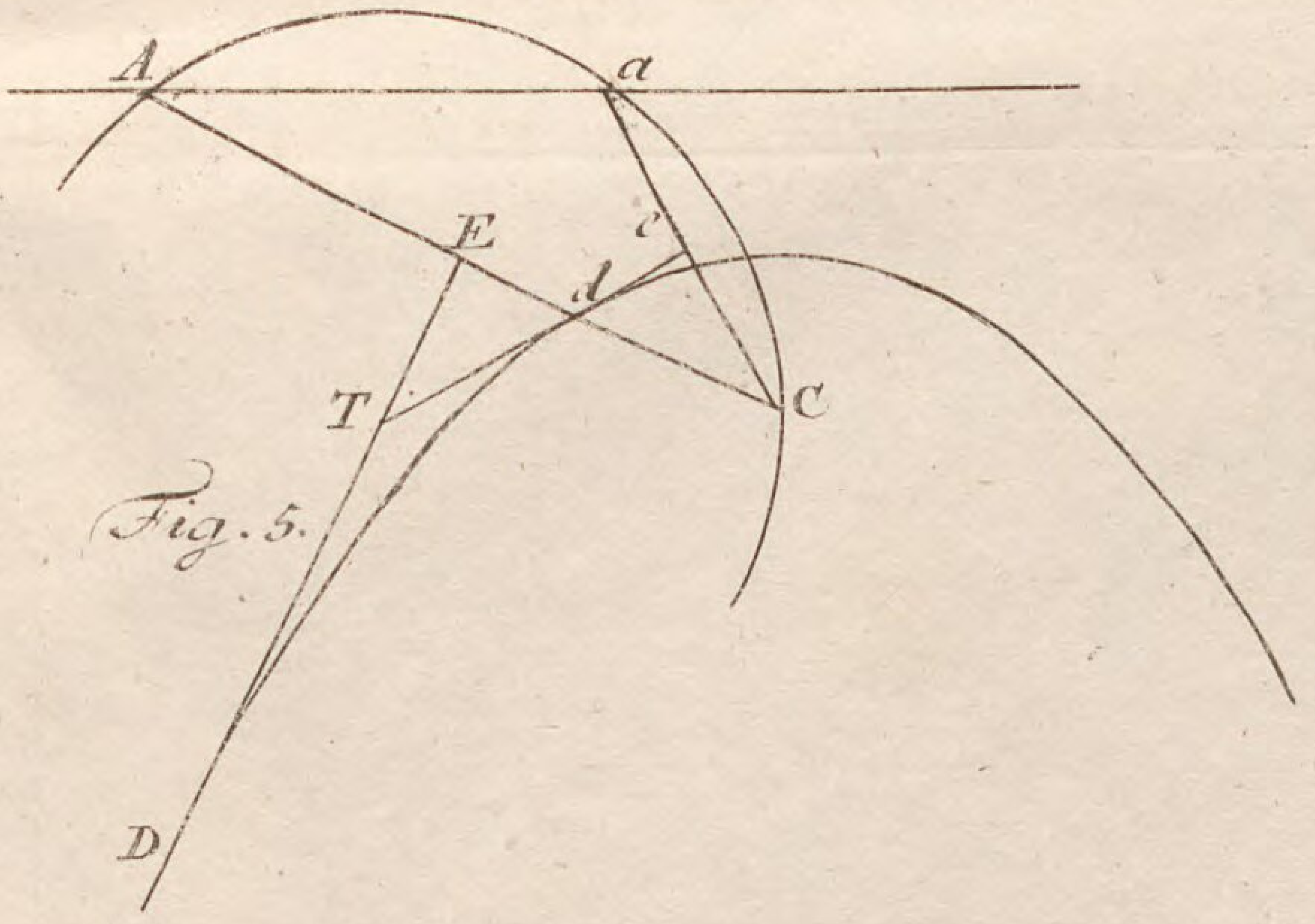


Fig. 5.

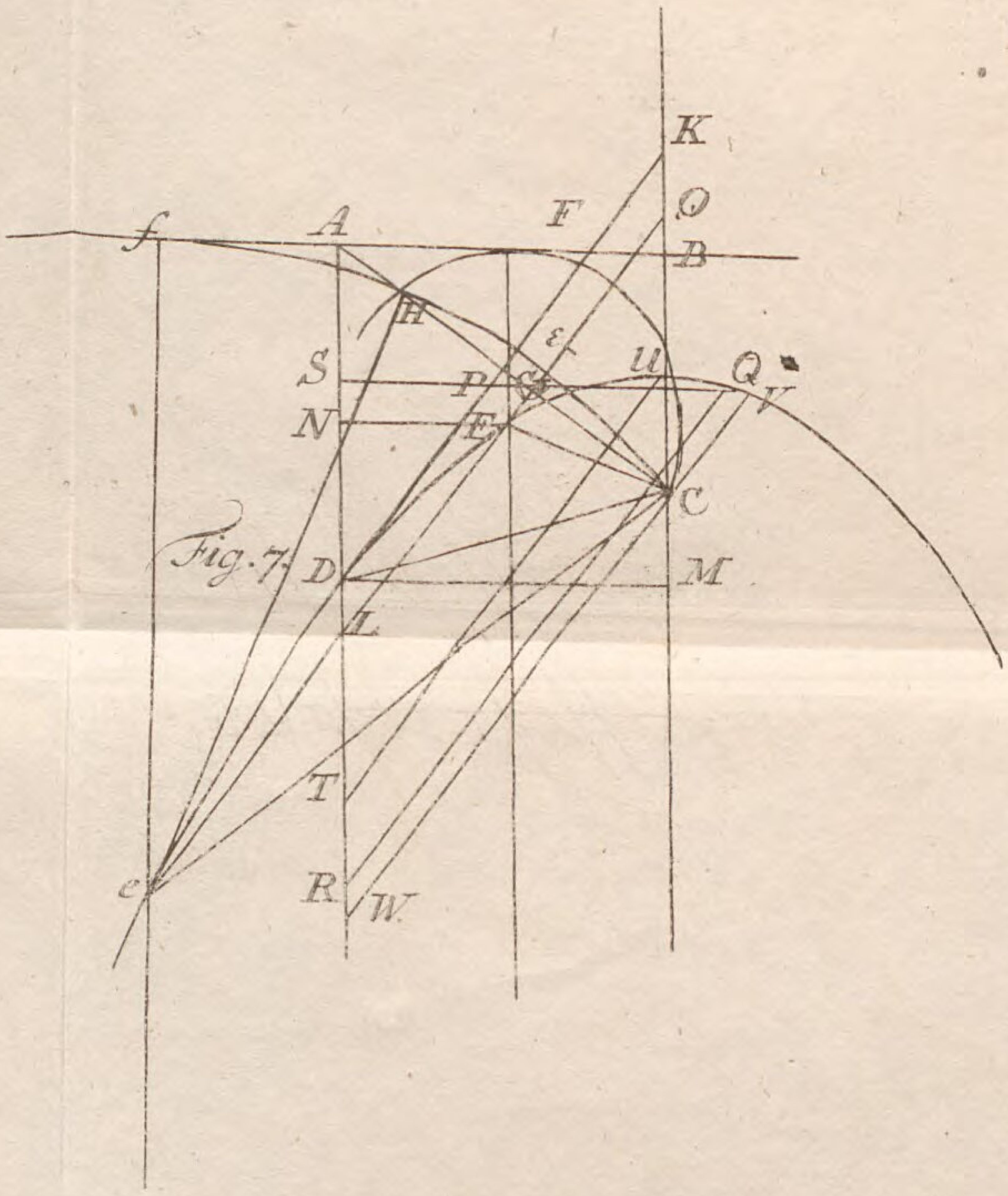


Fig. 7.

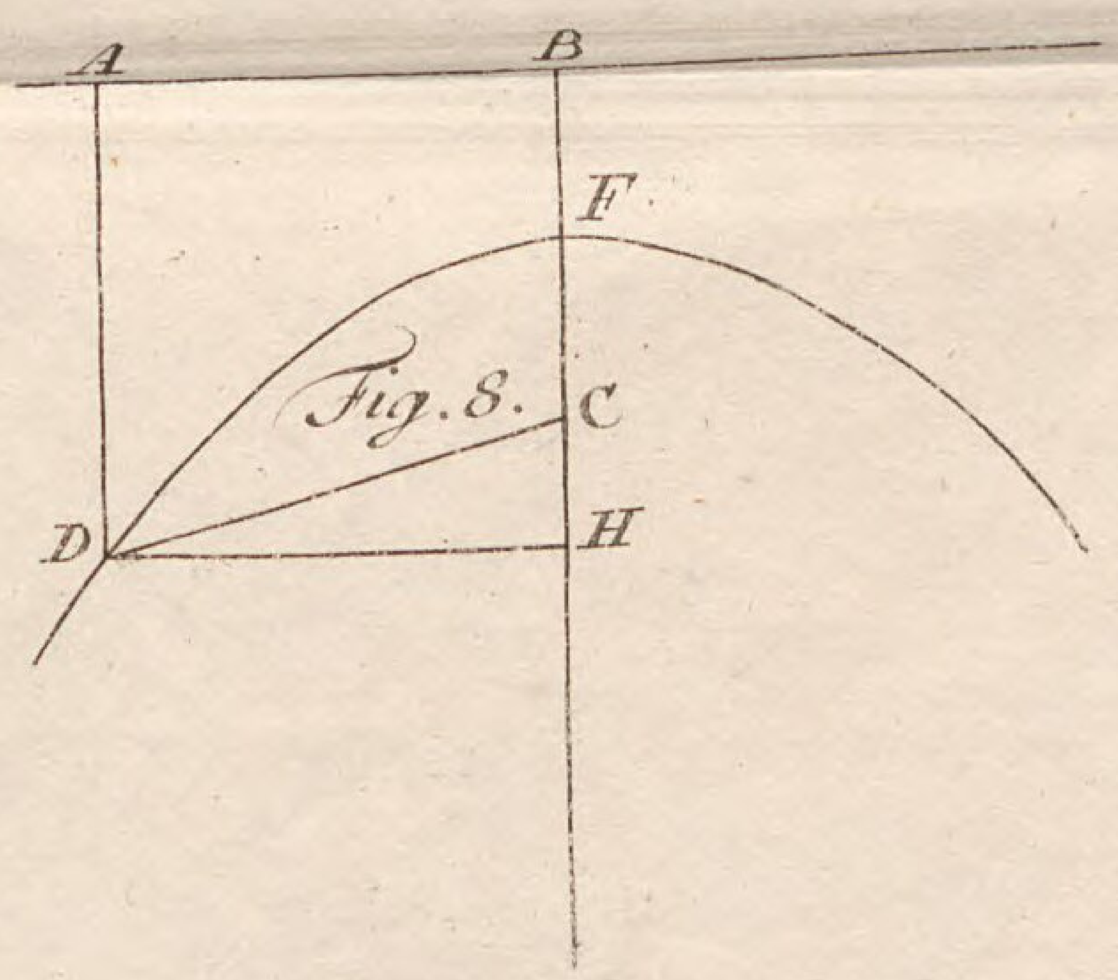


Fig. 8.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Simson, Robert

Robert Simson's drey erste Bücher von den Kegelschnitten Mit 18 Kupf

Tübingen 1809

Math.p. 530 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082836-7